

→ mini aide en ligne début janvier sur www.mathamia.fr

EXERCICE 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , unité graphique 4 cm.

Dans l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} , i désigne le nombre de module 1, et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On appelle f l'application, qui, à tout nombre complexe z différent de $-2i$, associe

$$Z = f(z) = \frac{z - 2 + i}{z + 2i}.$$

1. Soit $z = x + iy$, avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0; -2)\}$, exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et de y .

En déduire la nature de :

- l'ensemble E des points M d'affixe z , tels que Z soit un réel;
 - l'ensemble F des points M d'affixe z du plan, tels que Z soit un imaginaire pur éventuellement nul.
 - Représenter ces deux ensembles.
2. On appelle A et B les points d'affixes respectives $z_A = 2 - i$ et $z_B = -2i$.
En remarquant que $Z = \frac{z - z_A}{z - z_B}$, retrouver les ensembles E et F par une méthode géométrique.
3. Calculer $|f(z) - 1| \times |z + 2i|$, et en déduire que les points M' d'affixe Z , lorsque le point M d'affixe z parcourt le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{5}$, sont tous sur un même cercle dont on précisera le rayon et l'affixe du centre.

EXERCICE 2

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. (Unité graphique : 2 cm.)
On désigne par A, B, C et G les points du plan d'affixes respectives

$$z_A = -1, z_B = 2 + i\sqrt{3}, z_C = 2 - i\sqrt{3} \text{ et } z_G = 3.$$

- Réaliser une figure et placer les points A, B, C et G .
 - Calculer les distances AB, BC et AC . En déduire la nature du triangle ABC .
 - Calculer un argument du nombre complexe $\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C}$. En déduire la nature du triangle GAC .
2. Soit (D) l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\left(-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \right) \cdot \overrightarrow{CG} = 12 \quad (1)$$

- a. Montrer que G est le barycentre du système de points pondérés

$$\{(A, -1); (B, 2); (C, 2)\}.$$

- Montrer que la relation (1) est équivalente à la relation $\overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{CG} = -4$ (2).
- Vérifier que le point A appartient à l'ensemble (D) .
- Montrer que la relation (2) est équivalente à la relation $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{GC} = 0$.
- En déduire l'ensemble (D) et le tracer.