NOM :	Classe : ....

Devoir « quasi commun » de Seconde

Le sujet comporte 5 exercices et sera rendu avec la copie.
La calculatrice est autorisée.
La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.

Barème sur 31 pts = 30 pts + 1pt bonus

Exercice1 – Informations chiffrées — / 5 pts

Pour aménager le jardin d'un client, un jardinier se rend chez son fournisseur « Terres et Jardins » où il achète un récupérateur d'eau de pluie.
Cet étourdi a fait tomber sa facture dans une flaque d'eau et certains nombres sont effacés.

1. Aidez–le à retrouver les valeurs manquantes car il doit donner un double de la facture à son client. Complétez pour cela le tableau ci–dessous. (*1,5 pt*)

Article	Quantité	Prix unitaire Hors Taxes	Remise	Prix unitaireHors Taxes après remise	MontantHors Taxes après remise
Récupérateur d'eau de pluie	1	33,40 €	10 %	$33{,}40 \times \left(1-\frac{10}{100}\right)=30{,}06$ €	$30{,}06 \times 1 = 30{,}06$ €
Kit de jonction	2	6,60 €	0 %	6,60 €	13,20 €
Toile d'ombrage	7	7,8 €	5 %	7,41 €	$7{,}41 \times 7 = 51{,}87$ €
Clip de fixation	$\frac{19{,}60}{3{,}92}=5$	4 €	2 %	3,92 €	19,60 €
				Total Hors Taxes	$30{,}06+13{,}20+51{,}87+19{,}60=114{,}73$ €

2. Le prix Hors Taxes (HT) de ses achats s'élève à 114,73 €.
   Le jardinier a payé 137,68 € Toutes Taxes Comprises (TTC). Calculer le taux de TVA appliqué en pourcentage. Arrondir le résultat à l'unité.(*1 pt*)
   Soit t % le taux de TVA, on a alors $114{,}73 \times \left(1+\frac{t}{100}\right)=137{,}68 \Leftrightarrow \mathrm{t}=100 \times \left(\frac{137{,}68}{114{,}73}-1\right) \approx 20$
   Le taux de TVA est de 20 %

3. Le jardinier facture l'installation à son client 250 € TTC.
   En déduire le montant total payé par le client en tenant compte des frais d'installation et de l'achat des marchandises. (*1 pt*)
   $250+137{,}68=387{,}68$ le montant total payé par le client est de 387,68 € .

4. Pour sa boutique, il décide d'acheter également des pots de muguet à 6 € l'unité. Pour les vendre, il majore le prix de 30 %. Toutefois pour écouler son stock après le 1er mai, il décide de les solder de 25 %. Il espère ainsi ne pas réaliser de pertes.
   A–t–il raison ? Justifier votre réponse (*1,5 pt*)
   $6 \times \left(1+\frac{30}{100}\right)\left(1-\frac{25}{100}\right)=5{,}85$
   Le jardinier a tort, il réalise une perte de 15 centimes pour chaque pot vendu .

Remarques :

- *Le prix unitaire correspond au prix d'un seul article.*
- *Dans une facture, on indique le prix unitaire ainsi que le montant total payé afin de vérifier qu'il n'y a pas d'erreur de calcul lorsque la quantité achetée est supérieure à 1.*
- *HT signifie Hors Taxes et TTC signifie Toutes Taxes Comprises.*
- *Le prix TTC est égal au prix HT augmenté du taux de la TVA.*

Exercice 2– Probabilités **/ 7 pts**

À l'occasion de la Fête des Mères, un fleuriste décide de proposer à ses clients plusieurs types de bouquets spéciaux.
Chaque bouquet spécial Fête des Mères est composé uniquement de tulipes ou uniquement d'œillets.
Chaque bouquet spécial Fête des Mères est composé de fleurs d'une même couleur, soit jaunes, soit roses.
Le fleuriste prépare 500 bouquets au total.

On sait que :

- 300 bouquets spéciaux sont composés uniquement avec des tulipes ;
- 45 % des bouquets de tulipes sont de couleur rose ;
- 30 % des bouquets d'œillets sont de couleur jaune.

Un client entre dans le magasin et achète au hasard un bouquet parmi les bouquets spéciaux « Fête des Mères ».
On note :

- T l'évènement : « le bouquet acheté est un bouquet de tulipes » ;
- R l'évènement : «les fleurs du bouquet acheté sont roses».

Dans tout l'exercice, les résultats seront donnés sous forme décimale arrondie à 0,01 près.

1. Compléter le tableau ci–dessous avec les effectifs des différents bouquets spéciaux préparés par le fleuriste. (*2 pts*)

	Fleurs jaunes	Fleurs roses	Total
Tulipes	$300 - 135 = 165$	$\frac{45}{100} \times 300 = 135$	300
Œillets	$\frac{30}{100} \times 200 = 60$	$200 - 60 = 140$	$500 - 300 = 200$
Total	$165 + 60 = 225$	135+140=275	500

2. Calculer les probabilités des événements T et R. (*1 pt*)

$p(T) = \frac{300}{500} = 0{,}6$ et $p(R) = \frac{200}{500} = 0{,}4$

3. Définir par une phrase l'événement $T \cap R$ et calculer sa probabilité.(*1 pt*)

$T \cap R$: : « le bouquet acheté est un bouquet de tulipes ET les fleurs du bouquet acheté sont roses ».

$p(T \cap R)=\frac{card(T \cap R)}{500} = \frac{135}{500} = 0{,}27$ *donc* $p(T \cap R)= 0{,}27$

4. Définir par une phrase l'événement $T \cup R$ et calculer sa probabilité.(*1 pt*)

$T \cup R$: : « le bouquet acheté est un bouquet de tulipes OU les fleurs du bouquet acheté sont roses ».

$p(T \cup R)=p(T) + p(R) - p((T \cap R) = 0{,}4 + \frac{275}{500} - 0{,}27 = 0{,}68$ *donc* $p(T \cup R) = 0{,}68$

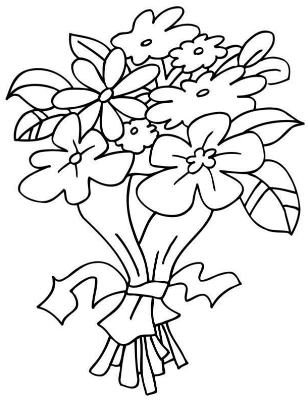
5. Définir par une phrase l'événement $\bar{R}$ et calculer sa probabilité.(*1 pt*)

$p(R) = \frac{275}{500} = 0{,}55$ et $p(\bar{R}) = 1 - p(R) = 1 - 0{,}55 = 0{,}45$ donc $p(\bar{R}) = 0{,}45$

6. Le client achète au hasard un bouquet de fleurs jaunes. Quelle est la probabilité qu'il ait choisi des œillets ? (*1 pt*)

L'univers est à présent constitué uniquement des 225 bouquets de fleurs jaunes. Parmi celles-ci il y a 60 œillets, donc la probabilité est de $\frac{60}{225} \approx 0{,}27$

donc la probabilité qu'il ait choisi des œillets parmi les bouquets de fleurs jaunes est de 27%



<u>Exercice 3</u> – Fonctions **/ 7 pts**

Partie A : Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 18x + 17$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)(x-17)$.*(0,5 pt)*

$$(x-1)(x-17) = x \times x - 17 \times x - 1 \times x - 1 \times (-17)$$
$$= x^2 - 17x - x + 17$$
$$= x^2 - 18x + 17$$
$$= f(x)$$

Ainsi, $f(x) = (x-1)(x-17)$.

2. Déterminer par le calcul, en choisissant la forme de $f(x)$qui vous paraît la mieux adaptée :

a. L'image de 0 par f *(0,5 pt)*

Le choix ici entre la forme factorisée ou la forme développé n'a pas vraiment d'importance.
On va toutefois choisir la forme développée qui minimise les calculs à faire dans ce cas précis.
$f(0) = 0^2 - 18 \times 0 + 17 = 17$ L'image de 0 par f est 17.

b. Le(s) antécédent(s) de 0 par$f$ *(1 pt)*

On cherche le(s) antécédent(s) de 0 par f.

Il faut donc résoudre l'équation $f(x) = 0$.

En choisissant la forme **factorisée** de $f(x)$, on obtient $(x-1)(x-17) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \ \ ou \ \ x - 17 = 0$

$$\Leftrightarrow x = 1 \ \ ou \ \ x = 17$$

On conclut que 0 admet deux antécédents par f : 1 et 17.

c. Le(s) antécédent(s) de 17 par$f$.*(1 pt)*

On cherche le(s) antécédent(s) de 17 par f.
Autrement dit, on cherche le(s) nombre(s) x possible(s) tel(s) que $f(x) = 17$.
Il faut donc résoudre l'équation $f(x) = 17$.
En choisissant la forme **développée** de $f(x)$, on obtient :
$x^2 - 18x + 17 = 17$
$\Leftrightarrow x^2 - 18x = 17 - 17$
$\Leftrightarrow x \times x - 18 \times x = 0$
$\Leftrightarrow x(x - 18) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x - 18 = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 18$
Ainsi, on trouve qu'il y a deux antécédents de 17 par f : il s'agit de 0 et de 18.

Partie B : Le problème du jardinier

C'est le printemps ! Un jardinier dispose d'un petit terrain rectangulaire de 10 mètres sur 8 mètres.

Il désire le partager en quatre parcelles fleuries, séparées par deux allées cimentées. Chaque allée doit être de forme rectangulaire, d'une largeur de x mètres, comme sur le dessin ci-contre.

On note g la fonction représentant l'aire du terrain, en m², disponible pour la culture.

1. Á quel intervalle appartient x?*(0,5 pt)*

x est une longueur qui doit rester inférieur ou égale à 8, et inférieur ou égale à 10. Donc $x \in [0:8]$.

2. Montrer que $g(x) = x^2 - 18x + 80$.*(1 pt)*

$g(x) = aire\ totale\ du\ terrain - aire\ de\ la\ partie\ cimentée$

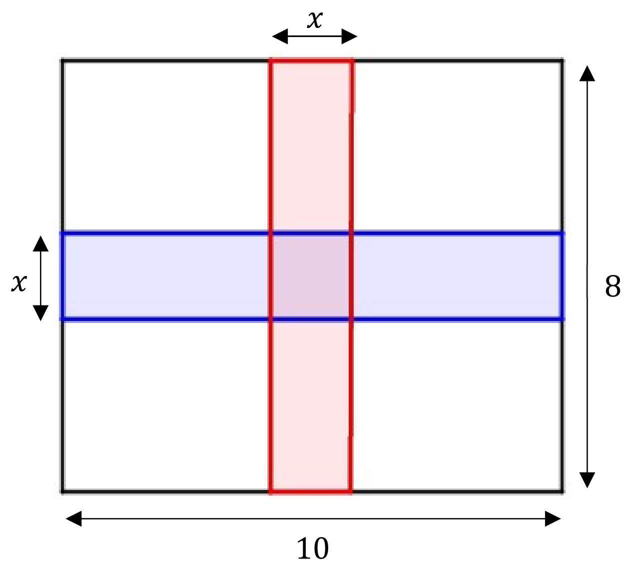
On va s'aider d'une figure.

L'aire d'un rectangle est le produit entre sa longueur et sa largeur.

Donc l'aire de l'allée bétonnée représentée ici en rouge est $8x$.

Pour l'allée représentée ici en bleue : $10x$.

L'aire de la partie bétonnée est égale à la somme de ces deux aires, à laquelle il faut soustraire la partie du milieu (celle qui est rouge et bleue) que l'on a compté deux fois.



Ainsi, l'aire de la partie bétonnée est :

$8x + 10x - x^2 = 18x - x^2$

On conclut que :

$g(x) = (10 \times 8) - (18x - x^2) \quad = x^2 - 18x + 80$

3. Le jardinier souhaite déterminer la largeur x des allées pour que l'aire totale des 4 parcelles cultivées soit supérieure ou égale à 63 m².

a. Montrer que cela revient à résoudre $f(x) \geq 0$, où f est la fonction définie dans la partie A. (*1 pt*)

Cela revient à chercher x tel que $g(x) \geq 63$ *(sans oublier que* $x \in [0\,;8]$*)*.

$$\begin{aligned} \text{Or,} \quad & g(x) = 63 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 18x + 80 \geq 63 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 18x + 80 - 63 \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 18x + 17 \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & f(x) \geq 0 \end{aligned}$$

Le problème est donc équivalent à chercher les solutions dans $[0; 8]$ de l'équation $f(x) \geq 0$.

b. Établir le tableau de signes de $f(x) = (x-1)(x-17)$ puis conclure quant au problème du jardinier.(*1,5 pt*)

D'après partie A 2. b. on sait que $(x-1)(x-17) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \ \ ou\ \ x = 17$

De plus, $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ et $x - 17 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 17$

On en déduit le tableau de signes de $(x-1)(x-17)$ sur R

x	$-\infty$		1		17		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-17$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)(x-17)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Résoudre l'équation $f(x) \geq 0$ dans $[0; 8]$, se fait en considérant le tableau de signes de $(x-1)(x-17)$,

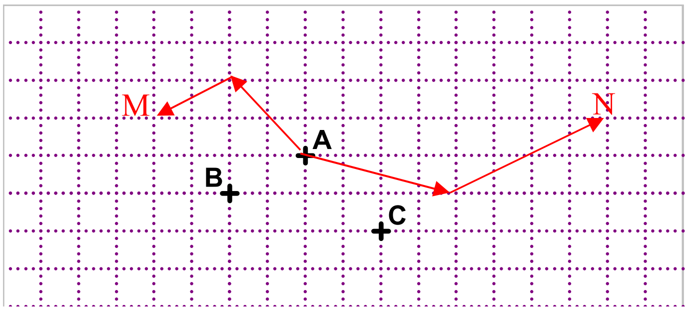
on peut en déduire les solutions sur R qui sont $f(x) \geq 0 \ \Leftrightarrow x \in [-\infty; 1] \cup [17; +\infty]$

Mais comme, dans le cas du problème du jardinier , on doit avoir $x \in [0: 8]$, il faut donc que $x \in [0: 1]$

Donc, pour que l'aire totale des 4 parcelles cultivées soit supérieure ou égale à 63 m², Le jardinier doit réaliser des allées de largeur comprise entre 0 et 1m .

Exercice 4– Vecteurs / 6 pts

Les deux parties sont indépendantes



Partie A

1. Placer N tel que $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BA}$.(*1 pt*)
2. Placer M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA}$.(*1 pt*)

Partie B

Le plan est désormais muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

On considère les points suivants : $F(2\,;1)$, $L(-2\,;3)$, $E(-3\,;-1)$ et $U(-1\,;-2)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{FL}$ et $\overrightarrow{EU}$.(*1 pt*)

$\overrightarrow{FL}\begin{pmatrix} x_L - x_F \\ y_L - y_F \end{pmatrix} = \overrightarrow{FL}\begin{pmatrix} -2-2 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{FL}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EU}\begin{pmatrix} x_U - x_E \\ y_U - y_E \end{pmatrix} = \overrightarrow{EU}\begin{pmatrix} -1+3 \\ -2+1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{EU}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{FL}$ et $\overrightarrow{EU}$ sont colinéaires. Quelle est la nature du quadrilatère $FLEU$? (*1 pt*)

$\det(\overrightarrow{FL};\overrightarrow{EU}) = -4\times(-1) - 2\times 2 = -4+4 = 0$

donc les vecteurs $\overrightarrow{FL}$ et $\overrightarrow{EU}$ sont colinéaires .

3. Soit R le point du plan tel que $\overrightarrow{EU} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ER}$.
   a. Calculer les coordonnées du point R. (*1 pt*)

$\overrightarrow{EU} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ER} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_U - x_E \\ y_U - y_E \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x_R - x_E \\ y_R - y_E \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x_R - (-3) \\ y_R - (-1) \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x_R + 3 \\ y_R + 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \frac{1}{3}(x_R+3) \\ -1 = \frac{1}{3}(y_R+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = x_R + 3 \\ -3 = y_R + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_R = 6-3 = 3 \\ y_R = -3-1 = -4 \end{cases}$ donc

$R(3;\ -4)$

   b. Peut–on affirmer que les points R, U et E sont alignés ? Justifier votre réponse.(*0,5 pt*)

Méthode 1 : $\overrightarrow{EU} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ER}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{EU}$ et $\overrightarrow{ER}$ sont colinéaires donc $(EU)//(ER)$ donc les points R, U et E sont alignés.

Méthode 2 : On a $\overrightarrow{RU}\begin{pmatrix} x_U - x_R \\ y_U - y_R \end{pmatrix} = \overrightarrow{RU}\begin{pmatrix} -1-3 \\ -2-(-4) \end{pmatrix} = \overrightarrow{RU}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

et on calcule le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{RU}$ et $\overrightarrow{EU}(2;-1)$:

$\det(\overrightarrow{RU};\overrightarrow{EU}) = -4\times(-1) - 2\times 2 = 0$ donc $\det(\overrightarrow{RU};\overrightarrow{EU}) = 0$

donc les vecteurs $\overrightarrow{RU}$ et $\overrightarrow{EU}$ sont colinéaires

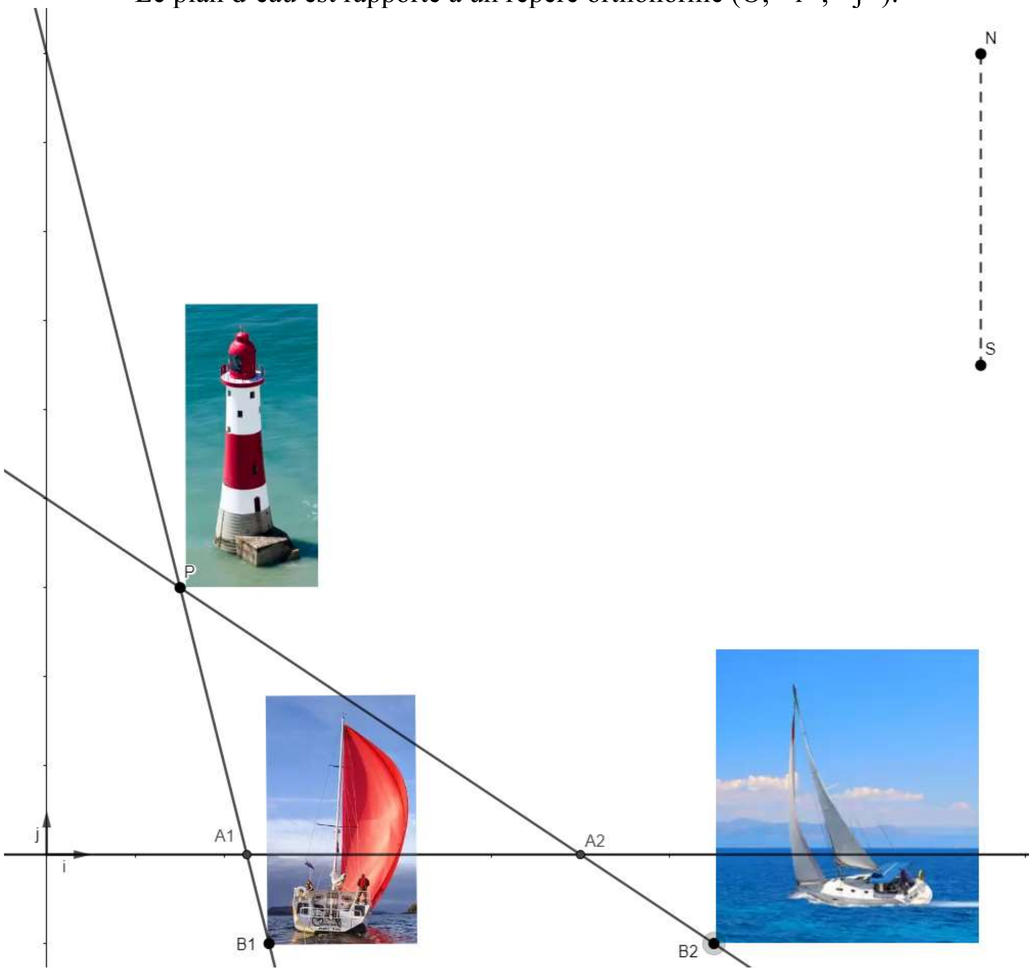
donc $(RU)//(EU)$ donc les points R, U et E sont alignés.

4. Démontrer que les coordonnées du point S milieu de $[FL]$ sont (0 ; 2). (*0,5 pt*)

S est milieu de $[FL]$ donc $\begin{pmatrix} x_S \\ y_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_L+x_F}{2} \\ \frac{y_L+y_F}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2+2}{2} \\ \frac{3+1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc S(0;2)

<u>Exercice 5</u>–Equations de droite, système **/ 6 pts**

Le plan d'eau est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.



1. **Avant-course !**

Deux bateaux attendent le début d'une régate au sud de la ligne de départ qui correspond à l'axe des abscisses. Ils vont franchir cette ligne aux points $A_1\left(\frac{9}{2} ; 0\right)$ et A_2 en suivant une trajectoire rectiligne et en visant le phare situé au point P(3 ; 6).

a/ On donne une équation cartésienne de la droite (B_1A_1), trajectoire initiale du bateau 1 : $4x + y - 18 = 0$.
Vérifier que le point P appartient bien à cette droite.(*0,5 pt*)

$4x_P + y_P - 18 = 4 \times 3 + 6 - 18 = 0$ Les coordonnées de P vérifient l'équation de la droite (B_1A_1) donc $P \in (B1A1)$

b/ On donne l'équation réduite de la droite (B_2P) , trajectoire initiale du bateau 2 : $y = -\frac{2}{3}x + 8$

Déterminer les coordonnées du point A_2 en lequel ce bateau coupe l'axe des abscisses.(*1 pt*)

Le point A_2 appartient à l'axe des abscisses donc $y_{A2} = 0$
et le point A_2 appartient à de la droite (B_2P) donc

$y_{A2} = -\frac{2}{3}x_{A2} + 8 \Leftrightarrow 0 = -\frac{2}{3}x_{A2} + 8 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x_{A2} = 8 \Leftrightarrow x_{A2} = 8 \times \frac{3}{2} = 12$ donc A_2 (12;0).

2. **C'est parti !**

Dès qu'ils coupent la ligne de départ, les bateaux mettent le cap sur la ligne d'arrivée qu'ils doivent franchir entre la bouée sud S(21 ; 11) et la bouée nord N(21 ; 18).

a/ Donner sans justifier l'équation réduite de la droite (SN).(*0,5 pt*)

La droite (SN) est une droite verticale d'équation $x = 21$

b/ Le bateau 1 vise la bouée S. Déterminer une équation cartésienne de la droite (A_1S).(*1,5 pts*)

la droite (A_1S) passe par les points $A_1\left(\frac{9}{2} ; 0\right)$ et S(21 ; 11) et son équation est de la forme $y = mx + p$

Coefficient directeur : La droite (A_1S) passe par les points de coordonnées $A_1\left(\frac{9}{2};0\right)$ et $S(21;11)$ donc son coefficient directeur vaut $m=\frac{0-11}{\frac{9}{2}-21}=\frac{-11}{\frac{-33}{2}}=\frac{22}{33}=\frac{2}{3}$ donc l'équation de la droite (A_1S) est de la forme $y=\frac{2}{3}x+p$.

Ordonnée à l'origine : le point A_1 de coordonnées $\left(\frac{9}{2};0\right)$ est un point de la droite (A_1S) donc les coordonnées de ce point vérifient l'équation de la droite (A_1S) donc $0=\frac{2}{3}\times\frac{9}{2}+p \Leftrightarrow p=-3$

donc (A1S) : $y=\frac{2}{3}x-3 \Leftrightarrow$ (A1S): $-\frac{2}{3}x+y+3=0$

c/ Arrivé en A_2, le bateau 2 se retrouve pris dans un brouillard printanier et est contraint de naviguer à la boussole. Il suit le cap donné par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $A_2(12;0)$et de vecteur directeur $\vec{u}$.(*1 pt*)

Pour tout point $M(x;y)$ de cette droite , les vecteurs $\overrightarrow{MA2}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires .

Or $\overrightarrow{MA2}\begin{pmatrix}x_{A2}-x\\y_{A2}-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{A2}-x\\y_{A2}-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12-x\\0-y\end{pmatrix}$

donc $\det(\overrightarrow{MA2};\vec{u})=0 \Leftrightarrow (12-x)\times 2-(0-y)\times 1=0 \Leftrightarrow -2x+y+24=0$

Donc une équation cartésienne de la droite passant par $A_2(12;0)$et de vecteur directeur $\vec{u}$ est $-2x+y+24=0$

3. Risque de collision !

Deux bateaux de plaisanciers naviguent au large pour suivre la course.

Leurs bateaux suivent les droites D_1 et D_2 d'équations respectives $4x-3y-3=0$ et $x+2y-20=0$.

Déterminer les coordonnées du point en lequel ils pourraient entrer en collision en cas de brouillard.(*1,5 pts*)

Soit $M(x;y)$ l'éventuel point d'intersection entre les droites D_1 et D_2

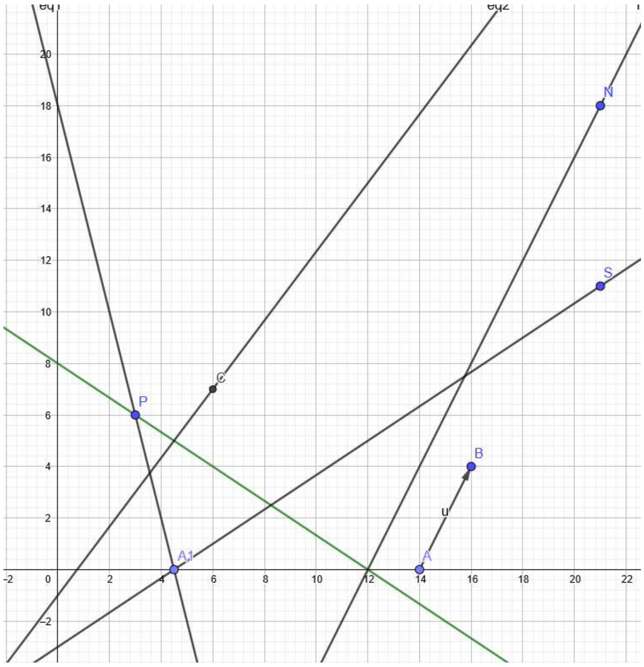
Les coordonnées du point M doivent donc vérifier le système d'équations

$$\begin{cases}x+2y-20=0\\4x-3y-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2y+20\\4(-2y+20)-3y-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2y+20\\-11y+77=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2y+20\\y=\frac{77}{11}=7\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=-2\times 7+20=6\\y=7\end{cases}$$

donc les coordonnées du point d'intersection entre les droites D_1 et D_2 est $(6;7)$

donc l'éventuel point de collision a pour coordonnées $(6;7)$.



eq1
eq2
N
S
C
P
B
u
A
A1