Baccalauréat spécialité

Bac 2023 - Recueil exos probabilités

POLYNÉSIE 13 MARS 2023 - EXERCICE 1 **4 points** **Thème : probabilités**

Les parties A *et* B *peuvent être traitées indépendamment*

Les utilisateurs de vélo d'une ville sont classés en deux catégories disjointes :

- ceux qui utilisent le vélo dans leurs déplacements professionnels;
- ceux qui utilisent le vélo uniquement pour leurs loisirs.

Un sondage donne les résultats suivants :

- 21 % des utilisateurs ont moins de 35 ans.
  Parmi eux, 68 % utilisent leur vélo uniquement pour leurs loisirs alors que les autres l'utilisent dans leurs déplacements professionnels;
- parmi les 35 ans ou plus, seuls 20 % utilisent leur vélo dans leurs déplacements professionnels, les autres l'utilisent uniquement pour leurs loisirs.

On interroge au hasard un utilisateur de vélo de cette ville.
Dans tout l'exercice on considère les évènements suivants :

- J : « la personne interrogée a moins de 35 ans »;
- T : « la personne interrogée utilise le vélo dans ses déplacements professionnels »;
- $\overline{J}$ et $\overline{T}$ sont les évènements contraires de J et T.

Partie A

1. Calculer la probabilité que la personne interrogée ait moins de 35 ans et utilise son vélo dans ses déplacements professionnels.
   On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Calculer la valeur exacte de la probabilité de T.
3. On considère à présent un habitant qui utilise son vélo dans ses déplacements professionnels.
   Démontrer que la probabilité qu'il ait moins de 35 ans est $0,30$ à 10^{-2} près.

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse uniquement aux personnes utilisant leur vélo dans leurs déplacements professionnels.

On admet que 30 % d'entre elles ont moins de 35 ans.
On sélectionne au hasard parmi elles un échantillon de 120 personnes auxquelles on va soumettre un questionnaire supplémentaire.
On assimile la sélection de cet échantillon à un tirage aléatoire avec remise.

On demande à chaque individu de cet échantillon son âge.

X représente le nombre de personnes de l'échantillon ayant moins de 35 ans.

Dans cette partie, les résultats seront arrondis à 10^{-3} *près.*

1. Déterminer la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.
2. Calculer la probabilité qu'au moins 50 utilisateurs de vélo parmi les 120 aient moins de 35 ans.

MÉTROPOLE-ANTILLES-GUYANE 20 MARS 2023 - EXERCICE 1 **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse inexacte.
Les questions sont indépendantes.

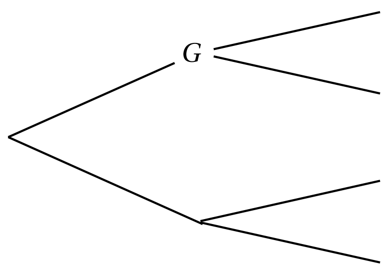
Un technicien contrôle les machines équipant une grande entreprise. Toutes ces machines sont identiques.
On sait que :

- 20 % des machines sont sous garantie ;
- 0,2 % des machines sont à la fois défectueuses et sous garantie ;
- 8,2 % des machines sont défectueuses.

Le technicien teste une machine au hasard.
On considère les évènements suivants :

- G : « la machine est sous garantie » ;
- D : « la machine est défectueuse » ;
- $\overline{G}$ et $\overline{D}$ désignent respectivement les évènements contraires de G et D.

Pour répondre aux questions 1 à 3, on pourra s'aider de l'arbre proposé ci-contre.



1. La probabilité $p_G(D)$ de l'évènement D sachant que G est réalisé est égale à :

   a. 0,002 **b.** 0,01 **c.** 0,024 **d.** 0,2

2. La probabilité $p\left(\overline{G} \cap D\right)$ est égale à :

   a. 0,01 b. 0,08 **c.** 0,1 **d.** 0,21

3. La machine est défectueuse. La probabilité qu'elle soit sous garantie est environ égale, à 10^{-3} près, à :

   a. 0,01 **b.** 0,024 **c.** 0,082 **d.** 0,1

Pour les questions 4 et 5, on choisit au hasard et de façon indépendante n machines de l'entreprise, où n désigne un entier naturel non nul.
On assimile ce choix à un tirage avec remise, et on désigne par X la variable aléatoire qui associe à chaque lot de n machines le nombre de machines défectueuses dans ce lot.
On admet que X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,082$.

4. Dans cette question, on prend $n = 50$.
   La valeur de la probabilité $p(X > 2)$, arrondie au millième, est de :

   a. 0,136 **b.** 0,789 **c.** 0,864 d. 0,924

5. On considère un entier n pour lequel la probabilité que toutes les machines d'un lot de taille n fonctionnent correctement est supérieure à $0,4$.

La plus grande valeur possible pour n est égale à :

a. 5 **b.** 6 **c.** 10 d. 11

MÉTROPOLE-ANTILLES-GUYANE 21 MARS 2023 - EXERCICE 1 **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse inexacte.

Un jeu vidéo possède une vaste communauté de joueurs en ligne. Avant de débuter une partie, le joueur doit choisir entre deux « mondes » : soit le monde A, soit le monde B.

On choisit au hasard un individu dans la communauté des joueurs.
Lorsqu'il joue une partie, on admet que :

- la probabilité que le joueur choisisse le monde A est égale à $\dfrac{2}{5}$;
- si le joueur choisit le monde A, la probabilité qu'il gagne la partie est de $\dfrac{7}{10}$;
- la probabilité que le joueur gagne la partie est de $\dfrac{12}{25}$.

On considère les évènements suivants :

- A : « Le joueur choisit le monde A » ;
- B : « Le joueur choisit le monde B » ;
- G : « Le joueur gagne la partie ».

1. La probabilité que le joueur choisisse le monde A et gagne la partie est égale à :

a. $\dfrac{7}{10}$ **b.** $\dfrac{3}{25}$ **c.** $\dfrac{7}{25}$ **d.** $\dfrac{24}{125}$

2. La probabilité $P_B(G)$ de l'événement G sachant que B est réalisé est égale à :

a. $\dfrac{1}{5}$ **b.** $\dfrac{1}{3}$ **c.** $\dfrac{7}{15}$ **d.** $\dfrac{5}{12}$

Dans la suite de l'exercice, un joueur effectue 10 parties successives.
On assimile cette situation à un tirage aléatoire avec remise.
On rappelle que la probabilité de gagner une partie est de $\dfrac{12}{25}$.

3. La probabilité, arrondie au millième, que le joueur gagne exactement 6 parties est égale à :

a. $0,859$ **b.** 0,671 **c.** 0,188 **d.** 0,187

4. On considère un entier naturel n pour lequel la probabilité, arrondie au millième, que le joueur gagne au plus n parties est de $0,207$. Alors :

a. $n = 2$ **b.** $n = 3$ **c.** $n = 4$ **d.** $n = 5$

5. La probabilité que le joueur gagne au moins une partie est égale à :

a. $1-\left(\dfrac{12}{25}\right)^{10}$ **b.** $\left(\dfrac{13}{25}\right)^{10}$ **c.** $\left(\dfrac{12}{25}\right)^{10}$ **d.** $1-\left(\dfrac{13}{25}\right)^{10}$

Centres étrangers groupe 2 22 mars - Exercice 4 **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Les cinq questions sont indépendantes.

Une chaîne de fabrication produit des pièces mécaniques. On estime que 4 % des pièces produites par cette chaîne sont défectueuses.
On choisit au hasard n pièces produites par la chaîne de fabrication.
Le nombre de pièces produites est suffisamment grand pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses tirées.
Dans les trois questions suivantes, on prend $n = 50$.

1. Quelle est la probabilité, arrondie au millième, de tirer au moins une pièce défectueuse ?

a. 1 **b.** 0,870 **c.** 0,600 **d.** 0,599

2. La probabilité $p(3 < X \leqslant 7)$ est égale à :

a. $p(X \leqslant 7) - p(X > 3)$ **b.** $p(X \leqslant 7) - p(X \leqslant 3)$
c. $p(X < 7) - p(X > 3)$ **d.** $p(X < 7) - p(X \geqslant 3)$

3. Quel est le plus petit entier naturel k tel que la probabilité de tirer au plus k pièces défectueuses soit supérieure ou égale à 95 % ?

a. 2 **b.** 3 **c.** 4 **d.** 5

Dans les questions suivantes, n ne vaut plus nécessairement 50.

4. Quelle est la probabilité de ne tirer que des pièces défectueuses ?

a. $0,04^n$ **b.** $0,96^n$ **c.** $1-0,04^n$ **d.** $1-0,96^n$

5. On considère la fonction Python ci-dessous. Que renvoie-t-elle ?

```
def seuil (x) :
    n=1
    while 1-0.96**n < x :
        n = n + 1
    return n
```

a. Le plus petit nombre n tel que la probabilité de tirer au moins une pièce défectueuse soit supérieure ou égale à x.

b. Le plus petit nombre n tel que la probabilité de ne tirer aucune pièce défectueuse soit supérieure ou égale à x.

c. Le plus grand nombre n tel que la probabilité de ne tirer que des pièces défectueuses soit supérieure ou égale à x.

d. Le plus grand nombre n tel que la probabilité de ne tirer aucune pièce défectueuse soit supérieure ou égale à x.

ASIE 23 MARS 2023 J1 - EXERCICE 4 — 5 points

Pour chacune des cinq questions de cet exercice, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Une urne contient 15 billes indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 15.
La bille numérotée 1 est rouge.
Les billes numérotées 2 à 5 sont bleues.
Les autres billes sont vertes.

On choisit une bille au hasard dans l'urne.
On note R (respectivement B et V) l'évènement : « La bille tirée est rouge » (respectivement bleue et verte).

Question 1 :

Quelle est la probabilité que la bille tirée soit bleue ou numérotée d'un nombre pair ?

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\dfrac{7}{15}$	$\dfrac{9}{15}$	$\dfrac{11}{10}$	Aucune des affirmations précédentes n'est juste.

Question 2 :

Sachant que la bille tirée est verte, quelle est la probabilité qu'elle soit numérotée 7 ?

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\dfrac{1}{15}$	$\dfrac{7}{15}$	$\dfrac{1}{10}$	Aucune des affirmations précédentes n'est juste.

Un jeu est mis en place. Pour pouvoir jouer, le joueur paie la somme de 10 euros appelée la mise.
Ce jeu consiste à tirer une bille au hasard dans l'urne.

- Si la bille tirée est bleue, le joueur remporte, en euro, trois fois le numéro de la bille.
- Si la bille tirée est verte, le joueur remporte, en euro, le numéro de la bille.
- Si la bille tirée est rouge, le joueur ne remporte rien.

On note G la variable aléatoire qui donne le gain algébrique du joueur, c'est-à-dire la différence entre ce qu'il remporte et sa mise de départ.
Par exemple, si le joueur tire la bille bleue numérotée 3, alors son gain algébrique est -1 euro.

Question 3 :

Que vaut $P(G = 5)$?

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\dfrac{1}{15}$	$\dfrac{2}{15}$	$\dfrac{1}{3}$	Aucune des affirmations précédentes n'est juste.

Question 4 :

Quelle est la valeur de $P_R(G = 0)$?

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
0	$\dfrac{1}{15}$	1	Aucune des affirmations précédentes n'est juste.

Question 5 :

Que vaut $P_{(G=-4)}(V)$?

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\dfrac{1}{15}$	$\dfrac{4}{15}$	$\dfrac{1}{2}$	Aucune des affirmations précédentes n'est juste.

ASIE 24 MARS 2023 J2 - EXERCICE 4 **5 points**

Pour chacune des cinq questions de cet exercice, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

On considère L une liste de nombres constituée de termes consécutifs d'une suite arithmétique de premier terme 7 et de raison 3, le dernier nombre de la liste est 2 023 soit :

$$L = [7, 10, \dots, 2\,023].$$

Question 1 : Le nombre de termes de cette liste est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
2 023	673	672	2 016

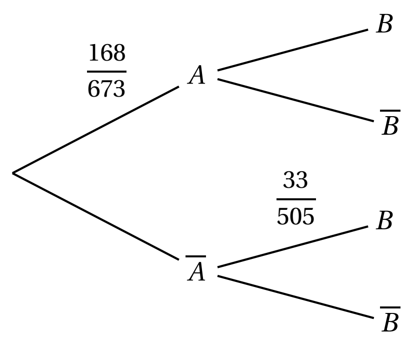
Question 2 : On choisit au hasard un nombre dans cette liste. La probabilité de tirer un nombre pair est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{34}{673}$	$\dfrac{336}{673}$	$\dfrac{337}{673}$

On rappelle qu'on choisit au hasard un nombre dans cette liste.
On s'intéresse aux évènements suivants :

- Évènement A : « obtenir un multiple de 4 »
- Évènement B : « obtenir un nombre dont le chiffre des unités est 6 »

Pour répondre aux questions suivantes on pourra utiliser l'arbre pondéré ci-dessous et on donne $p(A \cap B) = \dfrac{34}{673}$.



Question 3 :
La probabilité d'obtenir un multiple de 4 ayant 6 comme chiffre des unités est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\dfrac{168}{673} \times \dfrac{34}{673}$	$\dfrac{34}{673}$	$\dfrac{17}{84}$	$\dfrac{168}{34}$

Question 4 : $P_B(A)$ est égale à :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\dfrac{36}{168}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{33}{168}$	$\dfrac{34}{67}$

Question 5 : On choisit, au hasard, successivement, 10 éléments de cette liste.
Un élément peut être choisi plusieurs fois. La probabilité qu'aucun de ces 10 nombres ne soit un multiple de 4 est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\left(\dfrac{505}{673}\right)^{10}$	$1-\left(\dfrac{505}{673}\right)^{10}$	$\left(\dfrac{168}{673}\right)^{10}$	$1-\left(\dfrac{168}{673}\right)^{10}$

AMÉRIQUE DU NORD J1 27 MARS 2023 - EXERCICE 1 — 5 points

Dans un souci d'améliorer sa politique en matière de développement durable, une entreprise a réalisé une enquête statistique sur sa production de déchets.
Dans cette enquête, les déchets sont classés en trois catégories :

— 69 % des déchets sont minéraux et non dangereux ;
— 28 % des déchets sont non minéraux et non dangereux ;
— les déchets restants sont des déchets dangereux.

Cette enquête statistique nous apprend également que :

— 73 % des déchets minéraux et non dangereux sont recyclables ;
— 49 % des déchets non minéraux et non dangereux sont recyclables ;
— 35 % des déchets dangereux sont recyclables.

Les parties A *et* B *sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.*

Partie A

Dans cette entreprise, on prélève au hasard un déchet. On considère les évènements suivants :

— M : « Le déchet prélevé est minéral et non dangereux » ;

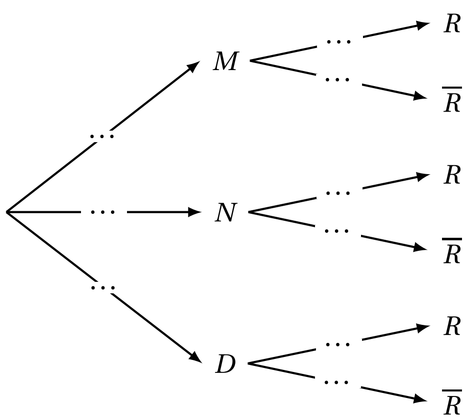
— N : « Le déchet prélevé est non minéral et non dangereux » ;

— D : « Le déchet prélevé est dangereux » ;

— R : « Le déchet prélevé est recyclable ».

On note $\overline{R}$ l'évènement contraire de l'évènement R.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation de l'énoncé.



2. Justifier que la probabilité que le déchet soit dangereux et recyclable est égale à 0,010 5.

3. Déterminer la probabilité $P\left(M \cap \overline{R}\right)$ et interpréter la réponse obtenue dans le contexte de l'exercice.

4. Démontrer que la probabilité de l'évènement R est $P(R) = 0{,}651\,4$.

5. On suppose que le déchet prélevé est recyclable. Déterminer la probabilité que ce déchet soit non minéral et non dangereux. *On donnera la valeur arrondie au dix-millième.*

Partie B

On rappelle que la probabilité qu'un déchet prélevé au hasard soit recyclable est égale à 0,651 4.

1. Afin de contrôler la qualité de la collecte dans l'entreprise, on prélève un échantillon de 20 déchets pris au hasard dans la production. On suppose que le stock est suffisamment important pour assimiler le prélèvement de cet échantillon à un tirage avec remise.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de déchets recyclables dans cet échantillon.

a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

b. Donner la probabilité que l'échantillon contienne exactement 14 déchets recyclables. *On donnera la valeur arrondie au dix-millième.*

2. Dans cette question, on prélève désormais n déchets, où n désigne un entier naturel strictement positif.

   a. Donner l'expression en fonction de n de la probabilité p_n qu'aucun déchet de cet échantillon ne soit recyclable.

   b. Déterminer la valeur de l'entier naturel n à partir de laquelle la probabilité qu'au moins un déchet du prélèvement soit recyclable est supérieure ou égale à 0,999 9.

La Réunion J1 28 mars 2023 - Exercice 1 — 5 points

Une entreprise appelle des personnes par téléphone pour leur vendre un produit.

— L'entreprise appelle chaque personne une première fois :
- la probabilité que la personne ne décroche pas est égale à 0,6;
- si la personne décroche, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à 0,3.

— Si la personne n'a pas décroché au premier appel, on procède à un second appel :
- la probabilité que la personne ne décroche pas est égale à $0,3$;
- si la personne décroche, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à 0,2.

— Si une personne ne décroche pas au second appel, on cesse de la contacter.

On choisit une personne au hasard et on considère les évènements suivants :

D_1 : « la personne décroche au premier appel »;

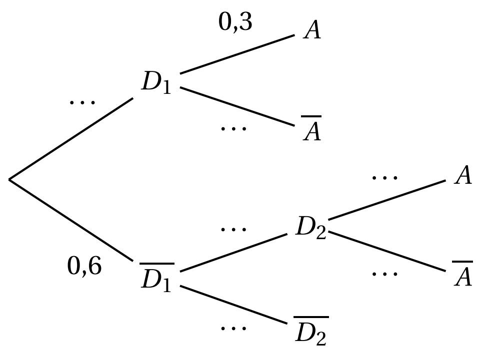
D_2 : « la personne décroche au deuxième appel »;

A : « la personne achète le produit ».

Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante

Partie A

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.
2. En utilisant l'arbre pondéré, montrer que la probabilité de l'évènement A est $P(A) = 0,204$.
3. On sait que la personne a acheté le produit. Quelle est la probabilité qu'elle ait décroché au premier appel ?



Partie B

On rappelle que, pour une personne donnée, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à $0,204$.

1. On considère un échantillon aléatoire de 30 personnes.
   On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes de l'échantillon qui achètent le produit.

   a. On admet que X suit une loi binomiale. Donner, sans justifier, ses paramètres.

   b. Déterminer la probabilité qu'exactement 6 personnes de l'échantillon achètent le produit. Arrondir le résultat au millième.

   c. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X.

   Interpréter le résultat.

2. Soit n un entier naturel non nul.

On considère désormais un échantillon de n personnes.

Déterminer la plus petite valeur de n telle que la probabilité qu'au moins l'une des personnes de l'échantillon achète le produit soit supérieure ou égale à $0,99$.

AMÉRIQUE DU NORD J2 28 MARS 2023 - EXERCICE 2 **5 points**

On étudie un groupe de 3 000 sportifs qui pratiquent soit l'athlétisme dans le club A, soit le basketball dans le club B.
En 2023, le club A compte 1 700 membres et le club B en compte 1 300.

On décide de modéliser le nombre de membres du club A et du club B respectivement par deux suites (a_n) et (b_n), où n désigne le rang de l'année à partir de 2023.
L'année 2023 correspond au rang 0. On a alors $a_0 = 1\,700$ et $b_0 = 1\,300$.
Pour notre étude, on fait les hypothèses suivantes :

— durant l'étude, aucun sportif ne quitte le groupe ;

— chaque année, 15 % des sportifs du club A quittent ce club et adhèrent au club B ;

— chaque année, 10 % des sportifs du club B quittent ce club et adhèrent au club A.

1. Calculer les nombres de membres de chaque club en 2024.

2. Pour tout entier naturel n, déterminer une relation liant a_n et b_n.

3. Montrer que la suite (a_n) vérifie la relation suivante pour tout entier naturel n, on a :

$$a_{n+1} = 0,75a_n + 300.$$

4. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :

$$1200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1\,700.$$

   b. En déduire que la suite (a_n) converge.

5. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = a_n - 1\,200$.

   a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

   b. Exprimer v_n en fonction de n.

   c. En déduire que pour tout entier naturel n, $a_n = 500 \times 0,75^n + 1\,200$.

6. **a.** Déterminer la limite de la suite (a_n).

   b. Interpréter le résultat de la question précédente dans le contexte de l'exercice.

7. **a.** Recopier et compléter le programme Python ci-dessous afin qu'il renvoie la plus petite valeur de n à partir de laquelle le nombre de membres du club A est strictement inférieur à 1 280.

```
def seuil() :
    n = 0
    A = 1 700
    while ... :
        n=n+1
        A = ...
    return
```

b. Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on appelle la fonction seuil.

LA RÉUNION J2 29 MARS 2023 - EXERCICE 1 — 5 points

Un commerçant vend deux types de matelas : matelas RESSORTS et matelas MOUSSE.
On suppose que chaque client achète un seul matelas.
On dispose des informations suivantes :

- 20 % des clients achètent un matelas RESSORTS.
  Parmi eux, 90 % sont satisfaits de leur achat.
- 82 % des clients sont satisfaits de leur achat.

Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

On choisit au hasard un client et on note les évènements :

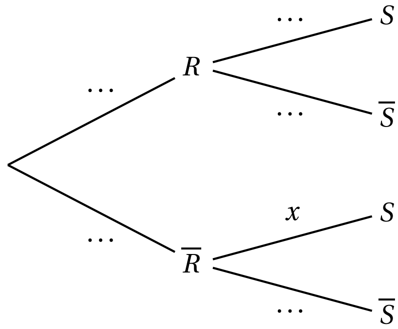
- R : « le client achète un matelas RESSORTS »,
- S : « le client est satisfait de son achat ».

On note $x = P_{\overline{R}}(S)$, où $P_{\overline{R}}(S)$ désigne la probabilité de S sachant que R n'est pas réalisé.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre décrivant la situation.

2. Démontrer que $x = 0,8$.

3. On choisit un client satisfait de son achat.
Quelle est la probabilité qu'il ait acheté un matelas RESSORTS ?
On arrondira le résultat à 10^{-2}.



Partie B

1. On choisit 5 clients au hasard.
On considère la variable aléatoire X qui donne le nombre de clients satisfaits de leur achat parmi ces 5 clients.

a. On admet que X suit une loi binomiale. Donner ses paramètres.

b. Déterminer la probabilité qu'au plus trois clients soient satisfaits de leur achat.
On arrondira le résultat à 10^{-3}.

2. Soit n un entier naturel non nul.
On choisit à présent n clients au hasard. Ce choix peut être assimilé à un tirage au sort avec remise.

a. On note p_n la probabilité que les n clients soient tous satisfaits de leur achat.
Démontrer que $p_n = 0,82^n$.

b. Déterminer les entiers naturels n tels que $p_n < 0,01$.
Interpréter dans le contexte de l'exercice.

NOUVELLE-CALÉDONIE J1 28 AOÛT 2023 - EXERCICE 1 — 5 points

Une entreprise de location de bateaux de tourisme propose à ses clients deux types de bateaux : bateau à voile et bateau à moteur.
Par ailleurs, un client peut prendre l'option PILOTE. Dans ce cas, le bateau, qu'il soit à voile ou à moteur, est loué avec un pilote.
On sait que :

- 60 % des clients choisissent un bateau à voile ; parmi eux, 20 % prennent l'option PILOTE.
- 42 % des clients prennent l'option PILOTE.

On choisit au hasard un client et on considère les évènements :

- V : « le client choisit un bateau à voile » ;
- L : « le client prend l'option PILOTE ».

Les trois parties peuvent être traitées de manière indépendante

Partie A

1. Traduire la situation par un arbre pondéré que l'on complètera au fur et à mesure.
2. Calculer la probabilité que le client choisisse un bateau à voile et qu'il ne prenne pas l'option PILOTE.
3. Démontrer que la probabilité que le client choisisse un bateau à moteur et qu'il prenne l'option PILOTE est égale à $0,30$.
4. En déduire $P_{\overline{V}}(L)$, probabilité de L sachant que V n'est pas réalisé.
5. Un client a pris l'option PILOTE.
   Quelle est la probabilité qu'il ait choisi un bateau à voile ? Arrondir à $0,01$ près.

Partie B

Lorsqu'un client ne prend pas l'option PILOTE, la probabilité que son bateau subisse une avarie est égale à $0,12$. Cette probabilité n'est que de $0,005$ si le client prend l'option PILOTE.
On considère un client. On note A l'évènement : « son bateau subit une avarie ».

1. Déterminer $P(L \cap A)$ et $P\left(\overline{L} \cap A\right)$.
2. L'entreprise loue 1 000 bateaux.
   À combien d'avaries peut-elle s'attendre ?

Partie C

On rappelle que la probabilité qu'un client donné prenne l'option PILOTE est égale à 0,42.
On considère un échantillon aléatoire de 40 clients. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de clients de l'échantillon prenant l'option PILOTE.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Donner sans justification ses paramètres.
2. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, qu'au moins 15 clients prennent l'option PILOTE.

NOUVELLE-CALÉDONIE J2 29 AOÛT 2023 - EXERCICE 4 5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une absence de réponse, ou une réponse multiple, ne rapporte ni n'enlève de point.

L'énoncé ci-dessous est commun aux questions 1. et 2.

Les 200 adhérents d'un club sont des filles ou des garçons. Ces adhérents pratiquent l'aviron ou le basket selon la répartition figurant dans le tableau ci-dessous.

	Aviron	**Basket**	**Total**
Filles	25	80	105
Garçons	50	45	95
Total	75	125	200

On choisit un adhérent au hasard et on considère les évènements suivants :

F : l'adhérent est une fille ;

A : l'adhérent pratique l'aviron.

1. La probabilité de F sachant A est égale à :

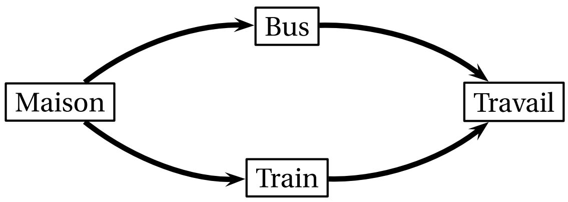
a. $\dfrac{25}{100}$ **b.** $\dfrac{25}{75}$ **c.** $\dfrac{25}{105}$ **d.** $\dfrac{75}{105}$

2. La probabilité de l'évènement $A \cup F$ est égale à :

a. $\dfrac{9}{10}$ **b.** $\dfrac{1}{8}$ **c.** $\dfrac{31}{40}$ **d.** $\dfrac{5}{36}$

L'énoncé ci-dessous est commun aux questions 3. et 4.

Pour se rendre à son travail, Albert peut utiliser au choix le bus ou le train.



La probabilité que le bus soit en panne est égale à b.
La probabilité que le train soit en panne est égale à t.
Les pannes de bus et de train surviennent de façon indépendante.

3. La probabilité p_1 que le bus ou le train soient en panne est égale à :

a. $p_1 = bt$ **b.** $p_1 = 1 - bt$ **c.** $p_1 = b + t$ **d.** $p_1 = b + t - bt$

4. La probabilité p_2 que Albert puisse se rendre à son travail est égale à :

a. $p_2 = bt$ **b.** $p_2 = 1 - bt$ **c.** $p_2 = b + t$ **d.** $p_2 = b + t - bt$

5. On considère une pièce de monnaie pour laquelle la probabilité d'obtenir FACE est égale à x.
On lance la pièce n fois. Les lancers sont indépendants.
La probabilité p d'obtenir au moins une fois FACE sur les n lancers est égale à

a. $p = x^n$ **b.** $p = (1 - x)^n$ **c.** $p = 1 - x^n$ **d.** $p = 1 - (1 - x)^n$

MÉTROPOLE J1 11 SEPTEMBRE 2023 - EXERCICE 3 **4 points**

*Les parties **A** et **B** sont indépendantes.*
Les probabilités demandées seront données à 10^{-3} *près.*
Pour aider à la détection de certaines allergies, on peut procéder à un test sanguin dont le résultat est soit positif, soit négatif.
Dans une population, ce test donne les résultats suivants :

— Si un individu est allergique, le test est positif dans 97 % des cas;

— Si un individu n'est pas allergique, le test est négatif dans 95,7 % des cas.

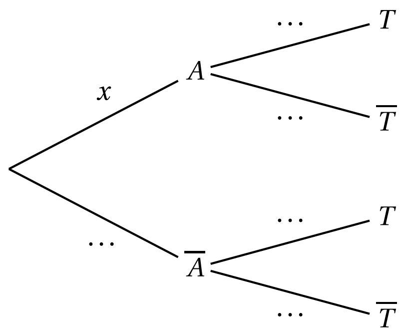
Par ailleurs, 20 % des individus de la population concernée présentent un test positif.
On choisit au hasard un individu dans la population, et on note :

- A l'évènement « l'individu est allergique »;
- T l'évènement « l'individu présente un test positif ».

On notera $\overline{A}$ et $\overline{T}$ les évènements contraires de A et T. On appelle par ailleurs x la probabilité de l'évènement A : $x = p(A)$.

Partie A

1. Reproduire et compléter l'arbre ci-contre décrivant la situation, en indiquant sur chaque branche la probabilité correspondante.
2. **a.** Démontrer l'égalité : $p(T) = 0,927x + 0,043$.
   b. En déduire la probabilité que l'individu choisi soit allergique.
3. Justifier par un calcul l'affirmation suivante :
   « Si le test d'un individu choisi au hasard est positif, il y a plus de 80 % de chances que cet individu soit allergique ».



Partie B

On réalise une enquête sur les allergies dans une ville en interrogeant 150 habitants choisis au hasard, et on admet que ce choix se ramène à des tirages successifs indépendants avec remise.
On sait que la probabilité qu'un habitant choisi au hasard dans cette ville soit allergique est égale à $0,08$.
On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de 150 habitants choisis au hasard associe le nombre de personnes allergiques dans cet échantillon.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?
   Préciser ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité que 20 personnes exactement parmi les 150 interrogées soient allergiques.
3. Déterminer la probabilité qu'au moins 10 % des personnes parmi les 150 interrogées soient allergiques.

MÉTROPOLE 12 SEPTEMBRE 2023 - EXERCICE 1 **5 points**

La paratuberculose est une maladie digestive infectieuse qui touche les vaches. Elle est due à la présence d'une bactérie dans l'intestin de la vache.
On réalise une étude dans une région dont 0,4 % de la population de vaches est infectée.
Il existe un test qui met en évidence la réaction immunitaire de l'organisme infecté par la bactérie.

Le résultat de ce test peut être soit « positif », soit « négatif ».
On choisit une vache au hasard dans la région.
Compte tenu des caractéristiques du test, on sait que :

- Si la vache est atteinte par l'infection, la probabilité que son test soit positif est de $0,992$;
- Si la vache n'est pas atteinte par l'infection, la probabilité que son test soit négatif est de 0,984 .

On désigne par :

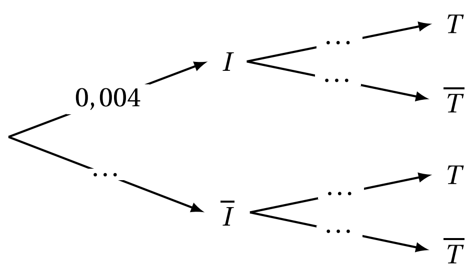
- I l'évènement « la vache est atteinte par l'infection »;
- T l'évènement « la vache présente un test positif ».

On note $\overline{I}$ l'évènement contraire de I et $\overline{T}$ l'évènement contraire de T.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1. Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous modélisant la situation.



2. **a.** Calculer la probabilité que la vache ne soit pas atteinte par l'infection et que son test soit négatif. On donnera le résultat à 10^{-3} près.

b. Montrer que la probabilité, à 10^{-3} près, que la vache présente un test positif est environ égale à 0,020.

c. La « valeur prédictive positive du test » est la probabilité que la vache soit atteinte par l'infection sachant que son test est positif. Calculer la valeur prédictive positive de ce test. On donnera le résultat à 10^{-3} près.

d. Le test donne une information erronée sur l'état de santé de la vache lorsque la vache n'est pas infectée et présente un résultat positif au test ou lorsque la vache est infectée et présente un résultat négatif au test.

Calculer la probabilité que ce test donne une information erronée sur l'état de santé de la vache. On donnera un résultat à 10^{-3} près.

Partie B

3. Lorsqu'on choisit au hasard dans la région un échantillon de 100 vaches, on assimile ce choix à un tirage avec remise.

On rappelle que, pour une vache choisie au hasard dans la région, la probabilité que le test soit positif est égale à 0,02.

On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de 100 vaches de la région choisies au hasard associe le nombre de vaches présentant un test positif dans cet échantillon.

  a. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier la réponse et préciser les paramètres de cette loi.

  b. Calculer la probabilité que dans un échantillon de 100 vaches, il y ait exactement 3 vaches présentant un test positif. On donnera un résultat à 10^{-3} près.

  c. Calculer la probabilité que dans un échantillon de 100 vaches, il y ait au plus 3 vaches présentant un test positif. On donnera un résultat à 10^{-3} près.

4. On choisit à présent un échantillon de n vaches dans cette région, n étant un entier naturel non nul. On admet que l'on peut assimiler ce choix à un tirage avec remise.

Déterminer la valeur minimale de n pour que la probabilité qu'il y ait, dans l'échantillon, au moins une vache testée positive, soit supérieure ou égale à 0,99.

Amérique du Sud J1 26 septembre 2023 - Exercice 2 **5 points**

1. Entre 1998 et 2020, en France 18 221 965 accouchements ont été recensés, parmi lesquels 293 898 ont donné naissance à des jumeaux et 4 921 ont donné naissance à au moins trois enfants.

  a. Avec une précision de 0,1 % calculer parmi tous les accouchements recensés, le pourcentage d'accouchements donnant naissance à des jumeaux sur la période 1998-2020.

  b. Vérifier que le pourcentage d'accouchements qui ont donné naissance à au moins trois enfants est inférieur à 0,1 %.

  On considère alors que ce pourcentage est négligeable.

  On appelle accouchement ordinaire, un accouchement donnant naissance à un seul enfant.

  On appelle accouchement double, un accouchement donnant naissance à exactement deux enfants.

  On considère dans la suite de l'exercice qu'un accouchement est soit ordinaire, soit double.

  La probabilité d'un accouchement ordinaire est égale à $0,984$ et celle d'un accouchement double est alors égale à $0,016$.

  Les probabilités calculées dans la suite seront arrondies au millième.

2. On admet qu'un jour donné dans une maternité, on réalise n accouchements.

On considère que ces n accouchements sont indépendants les uns des autres.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'accouchements doubles pratiqués ce jour.

  a. Dans le cas où $n = 20$, préciser la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X et calculer la probabilité qu'on réalise exactement un accouchement double.

b. Par la méthode de votre choix que vous expliciterez, déterminer la plus petite valeur de n telle que $p(X \geqslant 1) \geqslant 0,99$.

Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

3. Dans cette maternité, parmi les naissances double, on estime qu'il y a 30 % de jumeaux monozygotes (appelés « vrais jumeaux » qui sont obligatoirement de même sexe : deux garçons ou deux filles) et donc 70 % de jumeaux dizygotes (appelés « faux jumeaux », qui peuvent être de sexes différents : deux garçons, deux filles ou un garçon et une fille).

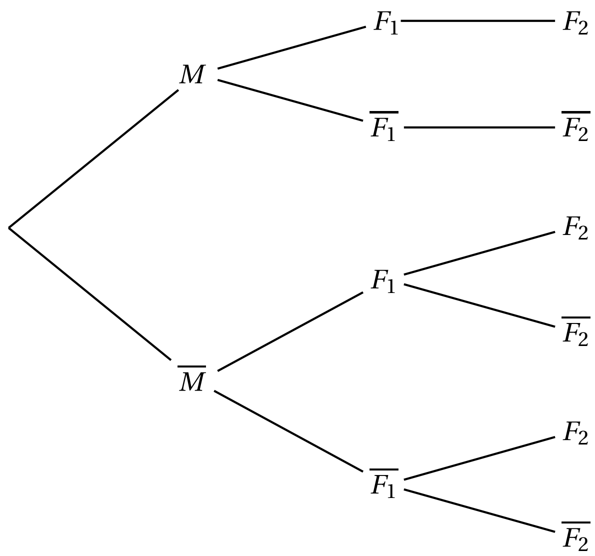
Dans le cas de naissances doubles, on admet que, comme pour les naissances ordinaires, la probabilité d'être une fille à la naissance est égale à $0,49$ et que celle d'être un garçon à la naissance est égale à $0,51$.

Dans le cas d'une naissance double de jumeaux dizygotes, on admet aussi que le sexe du second nouveau-né des jumeaux est indépendant du sexe du premier nouveau-né.

On choisit au hasard un accouchement double réalisé dans cette maternité et on considère les évènements suivants :

- M : « les jumeaux sont monozygotes » ;
- F_1 : « le premier nouveau-né est une fille » ;
- F_2 : « le second nouveau-né est une fille ».

On notera $p(A)$ la probabilité de l'évènement A et $\overline{A}$ l'évènement contraire de A.



a. Recopier puis compléter l'arbre pondéré ci-dessus.

b. Montrer que la probabilité que les deux nouveaux-nés soient des filles est 0,315 07.

c. Les deux nouveaux-nés sont des jumelles. Calculer la probabilité qu'elles soient monozygotes.

Amérique du Sud J2 27 septembre 2023 - Exercice 1 **5 points**

Partie A

Un jeu proposé dans une fête foraine consiste à effectuer trois tirs successivement sur une cible mouvante.

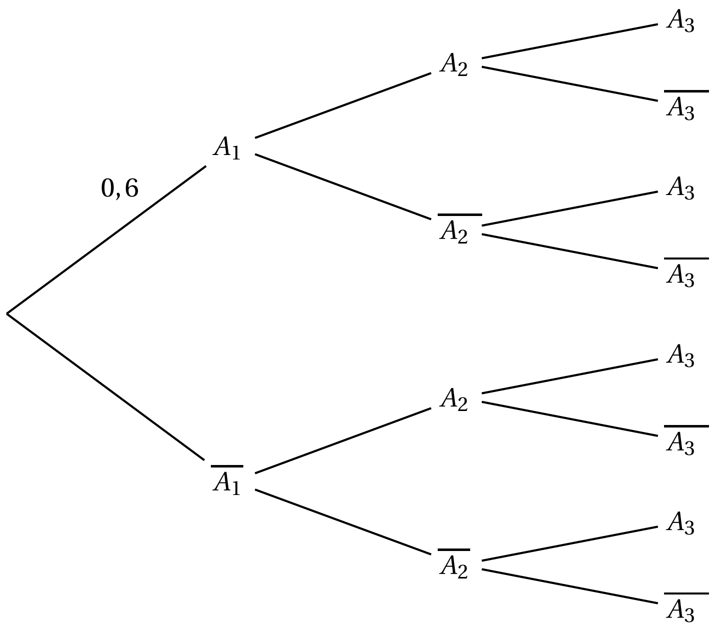
On a constaté que :

- Si le joueur atteint la cible lors d'un tir alors il ne l'atteint pas lors du tir suivant dans 65 % des cas ;
- Si le joueur n'atteint pas la cible lors d'un tir alors il l'atteint lors du tir suivant dans 50 % des cas.

La probabilité qu'un joueur atteigne la cible lors de son premier tir est de $0,6$.
Pour tout évènement A, on note $p(A)$ sa probabilité et $\overline{A}$ l'évènement contraire de A.
On choisit au hasard un joueur à ce jeu de tirs.
On considère les évènements suivants :

- A_1 : « Le joueur atteint la cible lors du 1er tir »
- A_2 : « Le joueur atteint la cible lors du 2e tir »
- A_3 : « Le joueur atteint la cible lors du 3e tir ».

1. Recopier et compléter, avec les probabilités correspondantes sur chaque branche, l'arbre pondéré ci-dessous modélisant la situation.



Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le joueur atteint sa cible au cours des trois tirs.

2. Montrer que la probabilité que le joueur atteigne exactement deux fois la cible au cours des trois tirs est égale à 0,401 5.

3. L'objectif de cette question est de calculer l'espérance de la variable aléatoire X, notée $E(X)$.

a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

$X = x_i$	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	0,1			0,073 5

b. Calculer $E(X)$.

c. Interpréter le résultat précédent dans le contexte de l'exercice.

Partie B

On considère N, un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Un groupe de N personnes se présente à ce stand pour jouer à ce jeu dans des conditions identiques et indépendantes.
Un joueur est déclaré gagnant lorsqu'il atteint trois fois la cible.
On note Y la variable aléatoire qui compte parmi les N personnes le nombre de joueurs déclarés gagnants.

1. Dans cette question, $N = 15$.

  a. Justifier que Y suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

  b. Donner la probabilité, arrondie à 10^{-3}, qu'exactement 5 joueurs soient gagnants à ce jeu.

2. Par la méthode de votre choix, que vous expliciterez, déterminer le nombre minimum de personnes qui doivent se présenter à ce stand pour que la probabilité qu'il y ait au moins un joueur gagnant soit supérieure ou égale à $0,98$.