~ Baccalauréat spécialité ~

Bac 2023 - La compil des exos sur les suites

POLYNÉSIE 13 MARS 2023 - EXERCICE 4 **6 points** **Thème : suites, fonctions**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,9u_n - 0,3.$$

1. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$.
   b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-3 < u_n \leqslant -1$.
   c. Démontrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.
   d. Démontrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.
2. On se propose d'étudier la fonction g définie sur $]-3\,;\,-1]$ par :

$$g(x) = \ln(0,5x + 1,5) - x.$$

   a. Justifier toutes les informations données par le tableau de variations de la fonction g (limites, variations, image de -1)

x	-3	-2	-1
Variations de g	$-\infty$ ↗	$g(-2)$	↘ 1

   b. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ a exactement une solution que l'on notera α et dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-3}.
3. Dans la suite de l'exercice, on considère la suite (v_n) définie pour tout $\in \mathbb{N}$, par :

$$v_n = \ln(0,5u_n + 1,5).$$

   a. En utilisant la formule donnée à la question **1. a.**, démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison $\ln(0,9)$.
   b. Soit n un entier naturel.
   Démontrer que $u_n = v_n$ si, et seulement si $g(u_n) = 0$.
   c. Démontrer qu'il n'existe aucun rang $k \in \mathbb{N}$ pour lequel $u_k = \alpha$.
   d. En déduire qu'il n'existe aucun rang $k \in \mathbb{N}$ pour lequel $v_k = u_k$.

CENTRES ÉTRANGERS J2 14 MARS 2023 - EXERCICE 2 **6 points**

On considère la fonction f définie sur $]-1,5\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(2x+3) - 1.$$

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]-1,5\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

1. Déterminer la limite de la fonction g en $-1,5$.
   On admet que la limite de la fonction g en $+\infty$ est $-\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction g sur $]-1,5\ ;\ +\infty[$.
3. **a.** Démontrer que, dans l'intervalle $]-0,5\ ;\ +\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.

   b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B : Étude de la suite (u_n)

On admet que la fonction f est strictement croissante sur $]-1,5\ ;\ +\infty[$.

1. Soit x un nombre réel. Montrer que si $x \in [-1\ ;\ \alpha]$ alors $f(x) \in [-1\ ;\ \alpha]$.
2. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha.$$

   b. En déduire que la suite (u_n) converge.

MÉTROPOLE-ANTILLES-GUYANE 20 MARS 2023 - EXERCICE 3 **5 points**

Une entreprise a créé une Foire Aux Questions (« FAQ ») sur son site internet.

On étudie le nombre de questions qui y sont posées chaque mois.

Partie A : Première modélisation

Dans cette partie, on admet que, chaque mois :

- 90 % des questions déjà posées le mois précédent sont conservées sur la FAQ ;
- 130 nouvelles questions sont ajoutées à la FAQ.

Au cours du premier mois, 300 questions ont été posées.

Pour estimer le nombre de questions, en centaines, présentes sur la FAQ le n-ième mois, on modélise la situation ci-dessus à l'aide de la suite (u_n) définie par :

$$u_1 = 3 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n \geqslant 1,\ u_{n+1} = 0,9u_n + 1,3.$$

1. Calculer u_2 et u_3 et proposer une interprétation dans le contexte de l'exercice.

2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n.$$

3. En déduire que la suite (u_n) est croissante.

4. On considère le programme ci-contre, écrit en langage Python.

Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de seuil(8.5) et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil(p) :
    n=1
    u=3
    while u<=p :
        n=n+1
        u=0.9*u+1.3
    return n
```

Partie B : Une autre modélisation

Dans cette partie, on considère une seconde modélisation à l'aide d'une nouvelle suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$v_n = 9 - 6 \times \mathrm{e}^{-0,19\times(n-1)}.$$

Le terme v_n est une estimation du nombre de questions, en centaines, présentes le n-ième mois sur la FAQ.

1. Préciser les valeurs arrondies au centième de v_1 et v_2.

2. Déterminer, en justifiant la réponse, la plus petite valeur de n telle que $v_n > 8,5$.

Partie C : Comparaison des deux modèles

1. L'entreprise considère qu'elle doit modifier la présentation de son site lorsque plus de 850 questions sont présentes sur la FAQ.

Parmi ces deux modélisations, laquelle conduit à procéder le plus tôt à cette modification ?

Justifier votre réponse.

2. En justifiant la réponse, pour quelle modélisation y a-t-il le plus grand nombre de questions sur la FAQ à long terme ?

MÉTROPOLE-ANTILLES-GUYANE-MAROC 21 MARS 2023 J2 - EXERCICE 2 **5 points**

Des biologistes étudient l'évolution d'une population d'insectes dans un jardin botanique.
Au début de l'étude la population est de 100 000 insectes.
Pour préserver l'équilibre du milieu naturelle nombre d'insectes ne doit pas dépasser 400 000.

Partie A : Étude d'un premier modèle en laboratoire

L'observation de l'évolution de ces populations d'insectes en laboratoire, en l'absence de tout prédateur, montre que le nombre d'insectes augmente de 60 % chaque mois.
En tenant compte de cette observation, les biologistes modélisent l'évolution de la population d'insectes à l'aide d'une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.
On a donc $u_0 = 0,1$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n : $u_n = 0,1 \times 1,6^n$.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n).
3. En résolvant une inéquation, déterminer le plus petit entier naturel n à partir duquel $u_n > 0,4$.
4. Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel serait-il préservé ? Justifier la réponse.

Partie B : Étude d'un second modèle

En tenant compte des contraintes du milieu naturel dans lequel évoluent les insectes, les biologistes choisissent une nouvelle modélisation.
Ils modélisent le nombre d'insectes à l'aide de la suite (v_n), définie par :

$$v_0 = 0,1 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = 1,6v_n - 1,6v_n^2,$$

où, pour tout entier naturel n, v_n est le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.

1. Déterminer le nombre d'insectes au bout d'un mois.
2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$ par

$$f(x) = 1,6x - 1,6x^2.$$

   a. Résoudre l'équation $f(x) = x$.

   b. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$.

3. **a.** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$.

   b. Montrer que la suite (v_n) est convergente.
   On note ℓ la valeur de sa limite. On admet que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

   c. Déterminer la valeur de ℓ.
   Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel sera-t-il préservé ? Justifier la réponse.

4. On donne ci-contre la fonction seuil, écrite en langage Python.

   a. Qu'observe-t-on si on saisit seuil(0.4) ?

   b. Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de seuil(0.35).
   Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil(a) :
    v=0.1
    n=0
    while v<a :
        v=1.6*v-1.6*v*v
        n=n+1
    return n
```

CENTRES ÉTRANGERS (EUROPE) 22 MARS 2023 J2 - EXERCICE 2 **5 points**

Partie A

$$f(x) = x - \ln(1 + x).$$

1. Justifier que la fonction f est définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $]-1~;~+\infty[$.
   Déterminer l'expression de sa fonction dérivée f'.
3. **a.** En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-1~;~+\infty[$.
   b. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $]-1~;~0[$.
4. **a.** Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1~;~+\infty[$, on a :

$$f(x) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\right).$$

   b. En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction f.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n - \ln(1+u_n).$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

1. Donner la valeur arrondie au millième de u_1.
2. En utilisant la question 3. a. de la partie A, démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant 0$.
3. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
4. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) converge.
5. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Asie 23 mars 2023 J1 - Exercice 1 **5 points**

Partie A

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 400$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 60.$$

1. **a.** Calculer u_1 et u_2.
   b. Conjecturer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
2. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a l'inégalité

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 600.$$

3. **a.** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
   b. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Justifier.
4. On donne une fonction écrite en langage Python :

```
def mystere(seuil) :
    n=0
    u=400
    while u <= seuil :
        n = n+1
        u = 0.9*u+60
    return n
```

Quelle valeur obtient-on en tapant dans la console de Python : mystere (500) ?

Partie B

Un arboriculteur possède un verger dans lequel il a la place de cultiver au maximum 500 arbres.
Chaque année il vend 10 % des arbres de son verger et puis il replante 60 nouveaux arbres.
Le verger compte 400 arbres en 2023.
L'arboriculteur pense qu'il pourra continuer à vendre et à planter les arbres au même rythme pendant les années à venir.
Va-t-il être confronté à un problème de place dans son verger ? Expliquer votre réponse.

ASIE 24 MARS 2023 J2 - EXERCICE 3 **4 points**

*Marie Sklodowska-Curie (*1867 – 1934*) est une physicienne (mais aussi chimiste et mathématicienne), polonaise naturalisée française.*
Deux Prix Nobel lui ont été décernés : un en Physique (partagé avec son mari et Henri Becquerel) en 1903 *et un en Chimie en* 1911 *pour la découverte de deux nouveaux éléments, le polonium (nom donné en hommage à ses origines) et le radium.*

On décide d'étudier le rayonnement radioactif du polonium lors de la désintégration des noyaux atomiques au cours du temps.
Au début de l'expérience, on dispose d'un morceau de 2 g de polonium.
On sait que 1 g de polonium contient 3×10^{21} noyaux atomiques.
On admet que, au bout de 24 heures, 0,5 % des noyaux se sont désintégrés et que, pour compenser cette disparition, on ajoute alors 0,005 g de polonium.
On modélise la situation à l'aide d'une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$; on note v_0 le nombre de noyaux contenus dans le polonium au début de l'expérience.
Pour $n \geqslant 1$, v_n désigne le nombre de noyaux contenus dans le polonium au bout de n jours écoulés.

1. **a.** Vérifier que $v_0 = 6 \times 10^{21}$.
   b. Expliquer que, pour tout nombre entier naturel n, on a

$$v_{n+1} = 0,995 v_n + 1,5 \times 10^{19}.$$

2. **a.** Démontrer, par récurrence sur n, que $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$.
   b. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel n, par :

$$u_n = v_n - 3 \times 10^{21}.$$

   a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 0,995.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $v_n = 3 \times 10^{21}\left(0,995^n + 1\right)$.
   c. En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Déterminer, par le calcul, au bout de combien de jours le nombre de noyaux de polonium sera inférieur à $4,5 \times 10^{21}$. Justifier la réponse.
5. On souhaite disposer de la liste des termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Pour cela, on utilise une fonction appelée noyaux programmée en langage Python et retranscrite partiellement ci-après.

```
1  def noyaux (n) :
2      V =6*10**21
3      L=[V]
4      for k in range (n) :
5          V= ...
6          L.append(V)
7      return L
```

a. À la lecture des questions précédentes, proposer deux solutions différentes pour compléter la ligne 5 de la fonction noyaux afin qu'elle réponde au problème.

b. Pour quelle valeur de l'entier n la commande noyaux(n) renverra-t-elle les relevés quotidiens du nombre de noyaux contenus dans l'échantillon de polonium pendant 52 semaines d'étude ?

AMÉRIQUE DU NORD J1 27 MARS 2023 - EXERCICE 4 **5 points**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{11}{u_n}\right)$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

Partie A - Étude de la suite (u_n)

1. Donner u_1 et u_2 sous forme de fractions irréductibles.
2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

   $$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{11}{x}\right)$$

   Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[\sqrt{11}\ ;\ +\infty\right[$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \sqrt{11}$.
4. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite réelle. On note a cette limite.
5. Après avoir déterminé et résolu une équation dont a est solution, préciser la valeur exacte de a.

Partie B - Application géométrique

Pour tout entier naturel n, on considère un rectangle R_n d'aire 11 dont la largeur est notée ℓ_n et longueur L_n

La suite (L_n) est définie par $L_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n,

$$L_{n+1} = \frac{L_n + \ell_n}{2}$$

1. **a.** Expliquer pourquoi $\ell_0 = 2,2$.

   b. Établir que pour tout entier naturel n,

   $$\ell_n = \frac{11}{L_n}.$$

2. Vérifier que la suite (L_n) correspond à la suite (u_n) de la **partie A**.

3. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $\ell_n \leqslant \sqrt{11} \leqslant L_n$.

4. On admet que les suites (L_n) et (ℓ_n) convergent toutes les deux vers $\sqrt{11}$. Interpréter géométriquement ce résultat dans le contexte de la **partie B**.

5. Voici un script, écrit en langage Python, relatif aux suites étudiées dans cette partie :

```
def heron(n):
  L=5
  ℓ=2.2
  for i in range(n):
    L = (L+ℓ) / 2
    ℓ = 11 / L
  return round(ℓ,6), round(L,6)
```

On rappelle que la fonction Python `round(x,k)` renvoie une version arrondie du nombre `x` avec `k` décimales.

a. Si l'utilisateur tape `heron(3)` dans une console d'exécution Python, qu'obtient-il comme valeurs de sortie pour ℓ et L?

b. Donner une interprétation de ces deux valeurs.

LA RÉUNION J1 28 MARS 2023 - EXERCICE 3 **5 points**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n + 1.$$

Partie A

Cette partie est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une absence de réponse, ou une réponse multiple, ne rapporte ni n'enlève de point.

1. La valeur de u_2 est égale à :

a. $\dfrac{11}{4}$ **b.** $\dfrac{13}{2}$

c. 3,5 **b.** 2,7

2. La suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n$ est :

a. arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$ **b.** géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$

c. constante. **d.** ni arithmétique, ni géométrique.

3. On considère la fonction ci-dessous, écrite de manière incomplète en langage Python.

n désigne un entier naturel non nul.
On rappelle qu'en langage Python « i in range (n) » signifie que i varie de 0 à $n-1$.

```
1  def terme (n)
2      U=3
3      for i in range(n) :
4  ......................
5      return U
```

Pour que terme (n) renvoie la valeur de u_n, on peut compléter la ligne 4 par :

a. U = U/2 + (i+1)/2+1 **b.** U = U/2 + n/2 + 1
c. U = U/2 + (i−1)/2+1 **d.** U = U/2 + i/2 + 1

Partie B

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$n \leqslant u_n \leqslant n+3.$$

2. En déduire la limite de la suite (u_n).

3. Déterminer la limite de la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)$.

LA RÉUNION J2 29 MARS 2023 - EXERCICE 2 **5 points**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{6u_n + 2}{u_n + 5}.$$

1. Calculer u_1.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{6x+2}{x+5}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
En déduire que pour tout réel $x > 2$, on a $f(x) > 2$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n > 2$.

3. On admet que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(2-u_n)(u_n+1)}{u_n+5}.$$

a. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel par :

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}.$$

a. Calculer v_0.

b. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{4}{7}$.

c. Déterminer, en justifiant, la limite de (v_n).
En déduire la limite de (u_n).

5. On considère la fonction Python seuil ci-contre, où A est un nombre réel strictement plus grand que 2.

Donner, sans justification, la valeur renvoyée par la commande seuil (2.001) puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil (A) :
    n = 0
    u = 8
    while u > A :
        u = (6*u + 2)/(u + 5)
        n = n + 1
    return n
```

NOUVELLE-CALÉDONIE J1 28 AOÛT 2023 - EXERCICE 2 5 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3.$$

1. **a.** Démontrer que $u_1 = 12$.

b. Déterminer u_2 en détaillant le calcul.

c. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation ainsi que la limite de la suite (u_n).

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n \geqslant n + 1.$$

b. En déduire la limite de la suite (u_n).

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_n - n - 1.$$

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
Donner sa raison et son premier terme v_0.

b. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

c. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 2 \times 5^n + n + 1.$$

d. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

4. On considère la fonction ci-contre, écrite de manière incomplète en langage Python et destinée à renvoyer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 10^7$.

a. Recopier le programme et compléter les deux instructions manquantes.

b. Quelle est la valeur renvoyée par cette fonction ?

```
def suite() :
    u = 3
    n = 0
    while ... :
        u = ...
        n = n + 1
    return n
```

Nouvelle-Calédonie J2 29 août 2023 - Exercice 3 5 points

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{-u_n - 4}{u_n + 3}.$$

On admet que u_n est défini pour tout entier naturel n.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2.
2. On considère la fonction `terme` ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python :

```
def terme (n) :
    u = ...
    for i in range(n):
      u = ...
    return(u)
```

On rappelle qu'en langage Python, « `i in range (n)` » signifie que i varie de 0 à $n-1$.

Recopier et compléter le cadre ci-dessus de sorte que, pour tout entier naturel n, l'instruction `terme (n)` renvoie la valeur de u_n.

3. Soit la fonction f définie sur $]-3\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-x-4}{x+3}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = f(u_n)$.
Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $]-3\,;\,+\infty[$.

4. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$-2 < u_{n+1} \leqslant u_n.$$

5. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
6. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{1}{u_n + 2}.$$

   a. Donner v_0.

   b. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison 1.

   c. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$u_n = \frac{1}{n+0,5} - 2.$$

   d. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Métropole 12 septembre 2023 - Exercice 3 5 points

On considère la suite (u_n) définie par : $\left\{\begin{array}{lcl} u_1 & = & \dfrac{1}{\text{e}} \\ u_{n+1} & = & \dfrac{1}{\text{e}}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)u_n \text{ pour tout entier } n \geqslant 1. \end{array}\right.$

1. Calculer les valeurs exactes de u_2 et u_3. On détaillera les calculs.

2. On considère une fonction écrite en langage Python qui, pour un entier naturel n donné, affiche le terme u_n. Compléter les lignes L_2 et L_4 de ce programme.

L_1	`def suite(n):`
L_2	`   ..................`
L_3	`   for i in range(1, n):`
L_4	`      u=..................`
L_5	`return u`

3. On admet que tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs.

a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $1+\dfrac{1}{n} \leqslant \mathrm{e}$.

b. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

c. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier votre réponse.

4. a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul, on a : $u_n = \dfrac{n}{\mathrm{e}^{n}}$.

b. En déduire, si elle existe, la limite de la suite (u_n).

Amérique du Sud J1 26 septembre 2023 - Exercice 4 **5 points**

Partie A

Le but de la partie A est d'étudier le comportement de la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,3$ et par la relation de récurrence, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 2u_n\left(1-u_n\right).$$

Cette relation de récurrence s'écrit $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x(1-x).$$

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$.

2. On admet que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Calculer u_1 puis effectuer un raisonnement par récurrence pour démontrer que pour tout rentier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. Justifier que la limite de la suite (u_n) est égale à $\dfrac{1}{2}$.

Partie B

Le but de cette partie est d'étudier un modèle d'évolution d'une population.
En 2022, cette population compte 3 000 individus.

On note P_n l'effectif en milliers de la population l'année $2022+n$. Ainsi $P_0 = 3$.
Selon un modèle inspiré du modèle de Verhulst, mathématicien belge du XIX[e] siècle, on considère que, pour tout entier naturel n :

$$P_{n+1} - P_n = P_n\left(1 - b \times P_n\right), \text{ où } b \text{ est un réel strictement positif.}$$

Le réel b est un facteur de freinage qui permet de tenir compte du caractère limité des ressources du milieu dans lequel évoluent ces individus.

1. Dans cette question $b = 0$.

  a. Justifier que la suite (P_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

  b. Déterminer la limite de P_n.

2. Dans cette question $b = 0,2$.

  a. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = 0,1 \times P_n$.
  Calculer v_0 puis montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 2v_n\left(1 - v_n\right)$.

  b. Dans ce modèle, justifier que la population se stabilisera autour d'une valeur que l'on précisera.

Amérique du Sud J2 27 septembre 2023 - Exercice 3 **5 points**

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 5u_n - 8n + 6.$$

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Soit n un entier naturel.
Recopier et compléter la fonction `suite_u` d'argument `n` ci-dessous, écrite en langage Python, afin qu'elle retourne la valeur de u_n.

```
def suite_u(n) :
    u = ...
    for i in range(1,n+1) :
    |    u= ...
    return u
```

3. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n \geqslant 2n$.

  b. En déduire la limite de la suite (u_n).

  c. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout entier naturel n vérifiant, $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$?

4. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

5. On considère la suite (v_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n - 2n + 1$.

  a. En dessous de la fonction `suite_u` précédente, on a écrit la fonction `suite_v` ci-dessous :

```
def suite_v(n):
    L =[]
    for i in range(n+1) :
    |    L.append(suite_u(i)-2*i+1)
    return L
```

La commande « L.append »permet de rajouter, en dernière position, un élément dans la liste L.

Lorsqu'on saisit `suite_v(5)` dans la console, on obtient l'affichage suivant :

```
>>> suite_v(5)
[1, 5, 25, 125, 625, 3125]
```

Conjecturer, pour tout entier naturel n, l'expression de v_{n+1} en fonction de v_n.

Démontrer cette conjecture.

b. En déduire, pour tout entier naturel n, la forme explicite de u_n en fonction de n.