Corrigé Type bac mercredi 2 avril

Exercice 1

Affirmation 1 : Fausse En effet :

En posant la suite (v_n), suite géométrique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison $q = \dfrac{3}{4}$, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 1 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$

Et donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.

En utilisant la formule connue pour déterminer la somme des $(n+1)$ premiers termes d'une suite géométrique, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 1 \times \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{4}} = \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{\frac{1}{4}} = 4\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right).$$

Comme on a : $-1 < \dfrac{3}{4} < 1$, on en déduit : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} = 0$.

Puis, par limite de la somme, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} = 1$.

Et, enfin, par limite du produit : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 4\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right) = 4$.

La limite de la suite est donc finie (et vaut 4).

Affirmation 2 : Fausse. En effet :

La fonction `suite()` part d'une variable `S` qui prend une valeur égale à 0, puis effectue une boucle `for`, qui va ajouter à ce 0 des puissances de $\dfrac{3}{4}$ (l'instruction `a**b` signifie a^b).

Il y a ici deux problèmes dans cette fonction pour que `suite(50)` renvoie la valeur u_{50}.

- Problème de la puissance k dans la boucle *for*
  La première erreur, est qu'au lieu d'ajouter des puissances successives de $\dfrac{3}{4}$, on ajoute toujours la même puissance de $\dfrac{3}{4}$. L'appel `suite(50)` ajoute $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{50}$ à chaque exécution de la boucle `for`, au lieu d'ajouter $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{0}$, puis $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{1}$, puis $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{2}$ et ainsi de suite jusqu'à $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{50}$.
- Problème du nombre d'itérations de la boucle *for*
  La seconde erreur est que le nombre u_{50} est la somme des 51 premières puissances de $\dfrac{3}{4}$ (de la puissance 0 à la puissance 50), et la boucle `for` ici s'exécutera 50 fois seulement, et pas 51 fois.

Pour que l'appel `suite(50)` renvoie u_{50}, il faudrait une fonction comme celle-ci :

```
def suite(k):
  S=0
  for i in range(k+1):
    S=S+(3/4)**i
  return S
```

Affirmation 3 : Vraie. En effet :

Quel que soit le réel a, la fonction f est définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, en tant que somme d'une fonction linéaire et du produit de la fonction ln par un réel, toutes ces fonctions étant définies et dérivables sur l'intervalle considéré.

Soit a un réel :

On a : $\forall x \in]0;+\infty[, \quad f'(x) = a \times \dfrac{1}{x} - 2 = \dfrac{a}{x} - 2$.

Notamment, pour $x = 1 \quad f'(1) = \dfrac{a}{1} - 2 = a - 2$.

La tangente à C au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si $f'(1) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $a = 2$.

Il existe donc une (unique) valeur de a telle que la tangente à C au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.

Affirmation 4 : Fausse En effet :

On a $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^x - x} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}\left(1-\mathrm{e}^{-2x}\right)}{\mathrm{e}^x\left(1-x\mathrm{e}^{-x}\right)} = \mathrm{e}^x \dfrac{\left(1-\mathrm{e}^{-2x}\right)}{\left(1-x\mathrm{e}^{-x}\right)}$.

- Au numérateur on sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-2x} = 0$ par composition, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1-\mathrm{e}^{-2x} = 1$ par somme ;
- Au dénominateur $x\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$ et on sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ par croissances comparées,

donc par quotient $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1-x\mathrm{e}^{-x} = 1$ par somme.

Le quotient a pour limite 1 et comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, on a finalement par produit de limites :

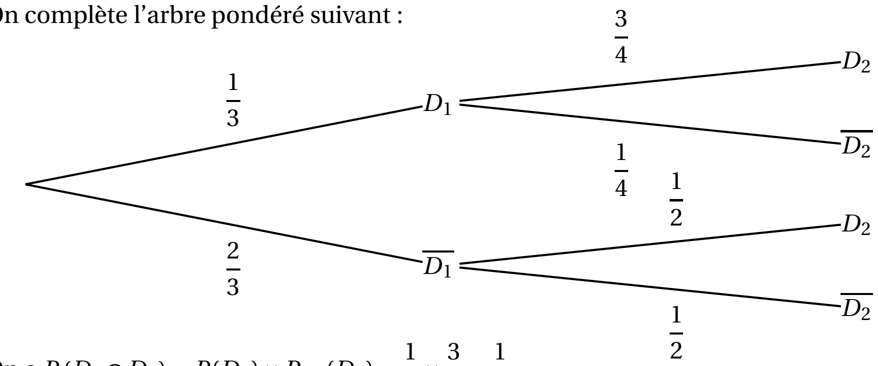
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^x - x} = +\infty$. L'affirmation est fausse.

Exercice 2

Partie A : étude du cas particulier où $n = 2$

Dans cette partie, le robot réalise deux déplacements successifs.

1. On complète l'arbre pondéré suivant :



2. On a $P\left(D_1 \cap D_2\right) = P(D_1) \times P_{D_1}(D_2) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$.

3. De la même façon $P\left(\overline{D_1} \cap D_2\right) = P\left(\overline{D_1}\right) \times P_{\overline{D_1}}(D_2) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$.

   D'après la formule des probabilités totales :

   $p_2 = P(D_2) = P\left(D_1 \cap D_2\right) + P\left(\overline{D_1} \cap D_2\right) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{3+4}{3 \times 4} = \dfrac{7}{12}$.

4. On a d'abord $p\left(\overline{D_2}\right) = 1 - p(D_2) = 1 - \dfrac{7}{12} = \dfrac{5}{12}$.

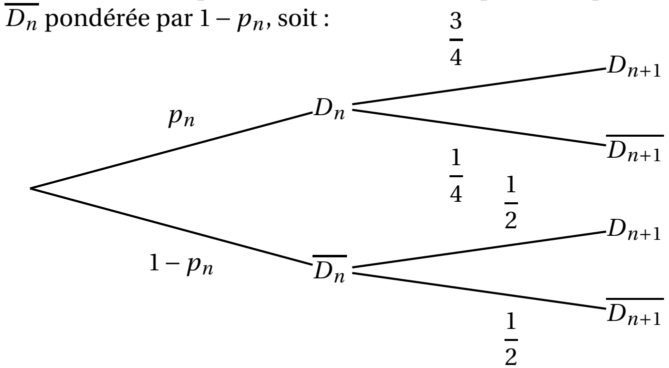
   Il faut calculer la probabilité conditionnelle :

   $$p_{\overline{D_2}}(D_1) = \dfrac{p\left(\overline{D_2} \cap D_1\right)}{p\left(\overline{D_2}\right)} = \dfrac{p\left(\overline{D_2}\right) \times P_{\overline{D_2}}(D_1)}{p\left(\overline{D_2}\right)} = \dfrac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}}{\frac{5}{12}} = \dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{5}{12}} = \dfrac{1}{5} = 0,2.$$

Partie B : étude de la suite (p_n).

1. $$p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$$

   On reprend l'arbre initial en partant de la branche D_n pondérée par le nombre p_n et la branche $\overline{D_n}$ pondérée par $1 - p_n$, soit :



   Toujours d'après la formule des probabilités totales :

   $p_{n+1} = P(D_{n+1}) = P(D_n) \times P_{D_n}(D_{n+1}) + P(\overline{D_n}) \times P_{\overline{D_n}}(D_{n+1}) = p_n \times \dfrac{3}{4} + (1 - p_n) \times \dfrac{1}{2}$

   $= \dfrac{3}{4}p_n + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}p_n = \dfrac{1}{4}p_n + \dfrac{1}{2}$

2. (a) On va montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a la propriété : $\mathscr{P}(n)$: « $p_n \leqslant p_{n+1} < \dfrac{2}{3}$ ».

   Initialisation : on a $p_1 = \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{12}$, $p_2 = \dfrac{7}{12}$ et $\dfrac{2}{3} = \dfrac{8}{12}$.

   On a $\dfrac{4}{12} < \dfrac{7}{12} < \dfrac{8}{12}$, soit $p_1 \leqslant p_2 < \dfrac{2}{3}$. Ainsi $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

   Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

   On suppose que $p_n \leqslant p_{n+1} < \dfrac{2}{3}$; comme $\dfrac{1}{4} > 0$, on a donc par produit :

   $\dfrac{1}{4}p_n \leqslant \dfrac{1}{4}p_{n+1} < \dfrac{1}{4} \times \dfrac{2}{3}$, soit $\dfrac{1}{4}p_n \leqslant \dfrac{1}{4}p_{n+1} < \dfrac{1}{6}$ et, en ajoutant à chaque membre $\dfrac{1}{2}$:

   $\dfrac{1}{4}p_n + \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{4}p_{n+1} + \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{2}$, soit $p_{n+1} \leqslant p_{n+2} < \dfrac{2}{3}$.

   Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

   Conclusion : $\mathscr{P}(1)$ est vraie et la propriété est héréditaire donc d'après le principe de récurrence, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie. On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n \leqslant p_{n+1} < \dfrac{2}{3}$.

   (b) On a vu que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n \leqslant p_{n+1}$ donc la suite (p_n) est croissante.

   On a vu que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n < \dfrac{2}{3}$. donc la suite (p_n) est majorée par $\dfrac{2}{3}$.

   D'après le théorème de convergence monotone, la suite (p_n) converge donc vers un nombre réel inférieur ou égal à $\dfrac{2}{3}$.

3. (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = p_n - \dfrac{2}{3}$ donc $p_n = u_n + \dfrac{2}{3}$.

   Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = p_{n+1} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{4}p_n + \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{4}p_n + \dfrac{3}{6} - \dfrac{4}{6} = \dfrac{1}{4}p_n - \dfrac{1}{6}$

   $= \dfrac{1}{4}(u_n + \dfrac{2}{3}) - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{4}u_n$.

   Ainsi la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$ et de premier terme $u_1 = p_1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3} = -\dfrac{1}{3}$.

   (b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\quad u_n = -\dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\quad p_n = -\dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} + \dfrac{2}{3}$.

Comme $-1 < \frac{1}{4} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$ et donc par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$.

On a donc par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \frac{2}{3}$.

Conclusion : sur un grand nombre de déplacements du robot celui-ci se dirigera en moyenne deux fois sur trois à droite et donc une fois sur trois à gauche.

Partie C

On répète 10 fois, de façon indépendante, une expérience aléatoire ayant 2 issues possibles : le succès S : « le robot va vers la droite » et l'échec $\overline{S}$. La probabilité du succès est $p(S) = \frac{3}{4}$.

Soit la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès (donc le nombre de déplacements vers la droite). X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{3}{4}$.

La seule possibilité de revenir au point de départ est de faire (globalement) 5 déplacements à droite et donc 5 déplacements à gauche, soit :

$P(X=5) = \binom{10}{5}\times\left(\frac{3}{4}\right)^5\times\left(\frac{1}{4}\right)^5 \approx 0{,}0583$, soit 0,058 au millième près.

Exercice 3

On considère les trois points A(3 ; 0 ; 0), B(0 ; 2 ; 0) et C(0 ; 0 ; 2).

Partie 1 : Distance du point O au plan (ABC)

1. Soit le vecteur $\overrightarrow{n}(2~;~3~;~3)$.

   - Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-3;2;0)$.
     $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{n} = -3\times2+2\times3+0\times3 = 0$ donc $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{n}$
   - Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(-3;0;2)$.
     $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{n} = -3\times2+0\times3+2\times3 = 0$ donc $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{n}$

   Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Les coordonnées de ces deux vecteurs ne sont pas proportionnelles, donc ils ne sont pas colinéaires. Ainsi le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à un couple de vecteurs directeurs du plan (ABC) donc il est normal au plan (ABC).

2. Le plan (ABC) admet pour vecteur normal $\overrightarrow{n}(2~;~3~;~3)$.
   Ainsi, il existe une constante $d\in\mathbb{R}$ telle que (ABC) : $2x+3y+3z+d=0$.
   De plus, A ∈ (ABC) donc ses coordonnées vérifient l'équation de (ABC).
   On a donc $2\times3+3\times0+3\times0+d=0 \iff d=-6$.
   Le plan (ABC) a donc pour équation cartésienne : $2x+3y+3z-6=0$.

3. La droite d passant par O et de vecteur directeur $\overrightarrow{n}(2~;~3~;~3)$ a donc pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2t\\ y = 3t \\ z = 3t\end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$

4. On note H le point d'intersection de la droite d et du plan (ABC).

   Les coordonnées de H vérifient le système $\begin{cases} x = 2t\\ y = 3t\\ z = 3t\\ 2x+3y+3z-6 = 0\end{cases}$

   On a donc : $2(2t)+3(3t)+3(3t)-6=0$, donc $22t=6$ donc $t=\frac{3}{11}$.

   Les coordonnées de H sont donc : $\left(\frac{6}{11};\frac{9}{11};\frac{9}{11}\right)$.

5. On sait que :
   — $(OH) = d$ est orthogonale à (ABC). (car $\overrightarrow{n}$ dirige (d) et $\overrightarrow{n}\perp$ (ABC)
   — H ∈ (ABC)
   Ainsi la distance du point O au plan (ABC) est OH.
   $\text{OH}^2 = \left(\frac{6}{11}\right)^2+\left(\frac{9}{11}\right)^2+\left(\frac{9}{11}\right)^2 = \frac{36+81+81}{11^2} = \frac{198}{11^2}$ donc $\text{OH} = \frac{\sqrt{198}}{11} = \frac{3\sqrt{22}}{11}$.

Partie 2 : Démonstration de la propriété

1. En prenant pour base le triangle OAB et pour hauteur OC, le volume du tétraèdre OABC est $V = \frac{\text{OC}\times\text{aire(OAB)}}{3}$.
   $\text{OC} = 2$ et $\text{aire(OAB)} = \frac{\text{OA}\times\text{OB}}{2} = \frac{3\times2}{3} = 3$
   Le volume du tétraèdre OABC est donc $V = \frac{2\times3}{3} = 2$.
2. En prenant pour base le triangle ABC et pour hauteur OH, le volume du tétraèdre OABC est $V = \frac{\text{OH}\times\text{aire(ABC)}}{3}$.
   Or $V=2$ et $\text{OH} = \frac{3\sqrt{22}}{11}$, donc $2 = \frac{\frac{3\sqrt{22}}{11}\times\text{aire(ABC)}}{3}$.
   On en déduit que : $\text{aire(ABC)} = \frac{6}{\text{OH}} = \frac{6}{\frac{3\sqrt{22}}{11}} = \frac{6\times11}{3\sqrt{22}} = \frac{22}{\sqrt{22}} = \sqrt{22}$.
3. Soit la propriété : pour le tétraèdre OABC, « le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des trois autres faces du tétraèdre ».

   - $\text{aire(OAB)} = 3$ donc $(\text{aire(OAB)})^2 = 9$
   - $\text{aire(OAC)} = \frac{\text{OA}\times\text{OC}}{2} = \frac{3\times2}{2} = 3$ donc $(\text{aire(OAC)})^2 = 9$
   - $\text{aire(OBC)} = \frac{\text{OB}\times\text{OC}}{2} = \frac{2\times2}{2} = 2$ donc $(\text{aire(OBC)})^2 = 4$

Donc $(\text{aire(OAB)})^2 + (\text{aire(OAC)})^2 + (\text{aire(OBC)})^2 = 9 + 9 + 4 = 22$.
Comme aire(OABC) $= \sqrt{22}$, on a :
$(\text{aire(OABC)})^2 = 22 = (\text{aire(OAB)})^2 + (\text{aire(OAC)})^2 + (\text{aire(OBC)})^2$.
La propriété est vérifiée.

Exercice 4

PARTIE A : Étude d'une fonction auxiliaire g

1. • $g(1) = 2 \times 0 - 1 \times 0 = 0$;
   • $g(\mathrm{e}) = 2 \times (\mathrm{e} - 1) - \mathrm{e} \times \ln \mathrm{e} = 2\mathrm{e} - 2 - \mathrm{e} \ln \mathrm{e} = \mathrm{e} - 2$.
2. On sait que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x \ln x = 0$ par croissances comparées, donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} g(x) = -2$ par somme.
3. g est une somme de produits de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :
   $g'(x) = 2 \times 1 - \ln x - x \times \dfrac{1}{x} = 2 - \ln x - 1 = 1 - \ln x$.
   Étude du signe de la dérivée : $g'(x) = 1 - \ln x$:
   $1 - \ln x > 0 \iff 1 > \ln x \iff \ln \mathrm{e} > \ln x \iff \mathrm{e} > x$.
   D'où le tableau de variations de g :

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
g	‖ -2	$\nearrow$	$e-2$	$\searrow$	$-\infty$

4.
   • Sur l'intervalle $]0\,;\,\mathrm{e}[$:
   — la fonction g est dérivable, donc continue sur $]0\,;\,\mathrm{e}[$
   — la fonction g est strictement croissante sur $]0\,;\,\mathrm{e}[$
   — $-2 < 0 < \mathrm{e} - 2$
   Ainsi d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique β de l'intervalle $]0\,;\,\mathrm{e}[$, tel que $g(\beta) = 0$. Or d'après **1/** $g(1) = 0$, donc $\beta = 1$;
   • Sur l'intervalle $]\mathrm{e}\,;\,+\infty[$:
   — la fonction g est dérivable, donc continue sur $]\mathrm{e}\,;\,+\infty[$
   — la fonction g est strictement décroissante sur $]\mathrm{e}\,;\,+\infty[$
   — $0 \in]-\infty ; \mathrm{e} - 2[$ c'est à dire $0 \in] \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) ; g(\mathrm{e})[$.
   Ainsi d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique α de l'intervalle $]\mathrm{e}\,;\,+\infty[$, tel que $g(\alpha) = 0$.
   A la calculatrice, on a :
   $g(4,92) \approx 0,0009$ et $g(4,93) \approx -0,005$, donc $4,92 < \alpha < 4,93$.
5. D'après les questions 3 et 4 on peut dresser le tableau de signes de g sur $]0\,;\,+\infty[$:

x	0		1		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

PARTIE B : Étude de la fonction f

1. On a : $f(x) = x\left[3 - \ln x - 2\dfrac{\ln x}{x}\right]$;
   Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ par croissances comparées, et $\lim\limits_{x \to +\infty} -\ln x = -\infty$ par produit, donc par somme de limites $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[3 - \ln x - 2\dfrac{\ln x}{x}\right] = -\infty$.
   Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, par produit de limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
2. (a) Sur $]0\,;\,+\infty[$, la fonction f somme de produits de fonctions dérivables sur cet intervalle est dérivable et :
   $\forall x \in]0\,;\,+\infty[, f'(x) = 3 - \ln x - x \times \dfrac{1}{x} - 2 \times \dfrac{1}{x} = 3 - \ln x - 1 - \dfrac{1}{x} = 2 - \ln x - \dfrac{2}{x} = \dfrac{2x - x\ln x - 2}{x} = \dfrac{(x-1) - x\ln x}{x} = \dfrac{g(x)}{x}$.
   (b) Le résultat précédent montre que puisque $x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $g(x)$ étudié à la question 5. de la partie A.
   D'où le tableau suivant :

x	0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

3. Comme $x^2 > 0$, pour $x > 0$, le signe de $f''(x)$ est celui de $2 - x$:
   Ainsi $2 - x > 0 \iff x < 2$ donc sur $[0 ; 2]$ la fonction f est convexe, sur $[2\,;\,+\infty]$ la fonction f est concave et le point de coordonnées $(2\,;\,f(2))$ est le point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.
   Or $f(2) = 6 - 2\ln 2 - 2\ln 2 = 6 - 4\ln 2$.
   Ainsi le point de coordonnées $(2\,;\,6 - 4\ln 2)$ est le point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.