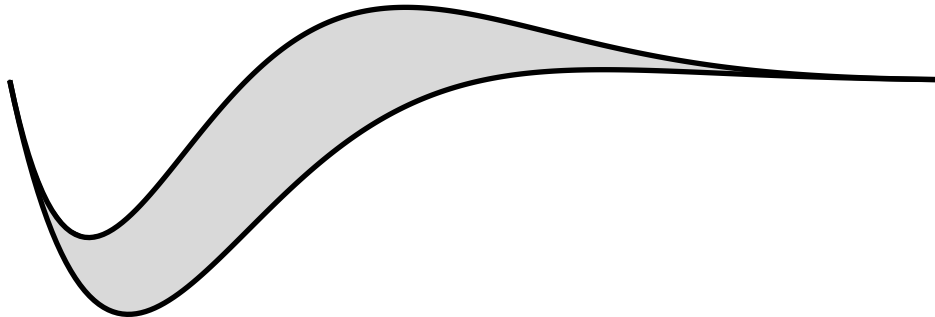


EXERCICE 1

10 pts

Un publicitaire souhaite imprimer le logo ci-dessous sur un T-shirt :



Il dessine ce logo à l'aide des courbes de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) \text{ et } g(x) = -e^{-x} \cos x$$

On admet que les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Partie A - Étude de la fonction f

1. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $-e^{-x} \leq f(x) \leq 3e^{-x}$.
2. En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{-x}(2 \cos x - 1)$ où f' est la fonction dérivée de f .
4. Dans cette question, on étudie la fonction f sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.
 - a. Déterminer le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.
 - b. En déduire les variations de f sur $[-\pi ; \pi]$.

Partie B - Calcul d'une intégrale

Soit $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{-x} \cos x \, dx$.

A l'aide d'une double intégration par parties (deux intégrations par parties successives), montrer que $2I = e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{3\pi}{2}}$

EXERCICE 2**5 points**

Les questions suivantes sont indépendantes.

1.
 - a. Combien peut-on former d'anagrammes du mot "LAINE"?
 - b. Combien de ces anagrammes commencent par une consonne?
 - c. Reprenez les deux questions précédentes avec le mot "BALEINE"?
2. On constitue un groupe de 6 personnes choisies parmi 25 femmes et 32 hommes.
 - a. Combien peut-on constituer de groupes ne comportant que des hommes?
 - b. Combien peut-on constituer de groupes ne comportant que des personnes de même sexe?
 - c. Combien peut-on constituer de groupes comportant au moins une femme et au moins un homme?
3. 15 personnes se rencontrent. Chacune d'elle serre la main à chacune des autres. Quel est le nombre de poignées de main échangées?

EXERCICE 3**5 points**

A la session 2025 du baccalauréat en France, un très grand nombre d'élèves de terminale ont passé le grand oral.

La note obtenue par chaque élève est un nombre entier entre 0 et 20. On suppose que cette note est modélisée par une variable aléatoire N qui suit la loi binomiale de paramètres $(20 ; 0,615)$.

1. Calculer l'espérance $E(N)$ et la variance $V(N)$ de la variable aléatoire N .
2. Le ministre souhaite attribuer une mention spéciale aux élèves ayant obtenu les meilleurs résultats à cette épreuve.
A l'aide de la calculatrice, déterminer en justifiant à partir de quelle note il doit attribuer cette mention spéciale pour que 20 % au maximum des élèves la décrochent.

3. On interroge au hasard dix élèves de terminales ayant passé le grand oral en 2025.
Les variables aléatoires $N_1, N_2, \dots, N_{10}$ modélisent la note sur 20 obtenue au grand oral par chacun d'entre eux. On admet que ces variables sont indépendantes et suivent la même loi binomiale de paramètres $(20 ; 0,615)$.

Soit S la variable définie par $S = N_1 + N_2 + \dots + N_{10}$.

Calculer l'espérance $E(S)$ et la variance $V(S)$ de la variable aléatoire S .

4. On considère la variable aléatoire $M = \frac{S}{10}$.
 - a. Que modélise cette variable aléatoire M dans le contexte de l'exercice?
 - b. Justifier que $E(M) = 12,3$ et $V(M) = 0,47355$.

- c. *Question bonus!* On admet l'inégalité suivante : $P(|M - E(M)| \geq 2) \leq \frac{V(M)}{2^2}$

Justifier l'affirmation ci-dessous :

« La probabilité que la moyenne des notes au grand oral de dix élèves pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 80 % ».