

Corrigé DS Der niv 1

EXERCICE 4

Soit f la fonction définie sur $I = \left[\frac{1}{4}; 4\right]$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

f est du signe de $\ln x$ sur I , donc négative sur $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$ et positive sur $[1; 4]$.

De plus f est continue sur I en tant que produit des fonctions inverse et logarithme, continues sur I .

Donc l'aire cherchée A , en unité d'aire du repère (ua) est donnée par :

$$A = - \int_{\frac{1}{4}}^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx$$

Or $f = u'u$ avec $u = \ln$, donc une primitive de f sur I est $F = \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}\ln^2$.

$$\text{D'où } A = [-F(x)]_{\frac{1}{4}}^1 + [F(x)]_1^4 = -F(1) + F\left(\frac{1}{4}\right) + F(4) - F(1) = \frac{1}{2} \left[(\ln 4)^2 + \left(\ln\left(\frac{1}{4}\right) \right)^2 \right]$$

$$\text{Or } \ln\left(\frac{1}{4}\right) = -\ln 4$$

$$\text{d'où : } A = (\ln 4)^2 \text{ ua} = (\ln 4)^2 \times 2 \times 3 \text{ cm}^2 = 6(\ln 4)^2 \text{ cm}^2 \approx 11,53 \text{ cm}^2$$