

EXERCICE 3

1.

$$\begin{aligned}
 \text{Pour tout entier } n, u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 x^{n+1} \ln(x+1) \, dx - \int_0^1 x^n \ln(x+1) \, dx \\
 &= \int_0^1 \left(x^{n+1} \ln(x+1) - \int_0^1 x^n \ln(x+1) \right) \, dx \\
 &= \int_0^1 (x^n(x-1) \ln(x+1)) \, dx
 \end{aligned}$$

On a sur $[0;1]$: $x^n \geq 0$, $x-1 \leq 0$ et $\ln(x+1) \geq 0$, donc $x^n(x-1) \ln(x+1) \leq 0$.

$$\text{Donc } \int_0^1 (x^n(x-1) \ln(x+1)) \, dx \leq 0 \quad \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \leq 0$$

Ainsi la suite u est décroissante.

2. (a) $\forall x \in [0;1]$, $1 \leq x+1 \leq 2$ donc $\ln(x+1) \leq \ln 2$ puisque la fonction \ln est croissante sur $]0; +\infty[$.

$$\text{D'où : } \forall x \in [0;1], x^n \ln(x+1) \leq x^n \ln 2 \quad (\text{car } x^n \geq 0)$$

On en déduit, par conservation de l'ordre par intégration sur un intervalle :

$$\begin{aligned}
 0 \leq x^n \ln(x+1) \leq x^n \ln 2 &\Leftrightarrow 0 \leq \int_0^1 x^n \ln(x+1) \, dx \leq \int_0^1 x^n \ln(2) \, dx \\
 &\Leftrightarrow 0 \leq u_n \leq \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln 2 \right]_0^1 \\
 &\Leftrightarrow 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1} \ln 2
 \end{aligned}$$

(b) Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln 2}{n+1} = 0$, donc (théorème des gendarmes), $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.