

EXERCICE 1

6 pts

Timothée passe quelques jours dans une capitale européenne. Il est intéressé par 11 musées différents dans cette capitale :

- 7 musées d'art
- 4 musées scientifiques.

Lors de ce séjour, il n'aura le temps que de visiter 5 musées différents.

1. Dans un premier temps, on s'intéresse aux différentes façons de choisir ces 5 musées, sans tenir compte de l'ordre dans lequel Timothée les visitera.
 - a. Calculer le nombre de façons que peut adopter Timothée pour choisir ces 5 musées.
 - b. Combien a-t-il de façons de choisir ces musées de sorte qu'il visite exactement 2 musées d'art?
 - c. Combien a-t-il de façons de choisir ces musées de sorte qu'il visite au moins un musée scientifique?
2. On prend maintenant en considération l'ordre dans lequel Timothée visitera ces musées.
 - a. On suppose que Timothée a déjà choisi 5 musées. Combien de façons a-t-il de les ordonner pour organiser les visites?
 - b. S'il n'a pas fait encore le choix des 5 musées, combien de visites sont alors possibles?
 - c. Timothée a choisi les 5 musées et décide d'en visiter un par jour, sauf un jour au cours duquel il en visitera deux. Combien a-t-il de façons d'organiser ces visites, en respectant cette contrainte, sans prendre en compte l'ordre des deux musées visités le même jour?

EXERCICE 2

5 pts

On donne le tableau de variations d'une fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f(x)$	0		0	2	1

\searrow (between $x = -1$ and $x = 0$)
 \nearrow (between $x = 0$ and $x = 1$)
 \searrow (between $x = 1$ and $x = +\infty$)

On définit la fonction F qui, à tout réel x , associe $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

1. Quel est le sens de variation de la fonction F ?
2. Encadrer au mieux $F(1)$ puis $F(3)$.
3. Étudier la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

EXERCICE 3**5 pts**

Posons, pour tout entier n non nul, $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$

1. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
2. Démontrer que, pour tout $n \geq 2$, $2I_n + nI_{n-1} = e^2$
3. En déduire que, pour tout $n \geq 2$: $I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$
4. Etudier la limite de la suite (I_n) .

EXERCICE 4**4 pts**

Le plan est muni d'un repère orthogonal d'unités 2 cm sur (Ox) et 3cm sur (Oy) .

Déterminer l'aire, en cm^2 , du domaine \mathcal{D} défini comme l'ensemble des points du plan situés entre l'axe des abscisses et la courbe d'équation $y = \frac{\ln x}{x}$ sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4}; 4\right]$.

En donner une valeur approchée au mm^2 près.