Corrigé DS n° 6

EXERCICE 1 7 pts

1. (a) • On a $R\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}\ ;\ \dfrac{y_A+y_B}{2}\ ;\ \dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$ donc $R(3\ ;\ 2\ ;\ -1)$; 0,25 pt

• $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_b-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}$. 0,25 pt

(b) Si $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}_1$ on sait qu'une équation de ce plan est de la forme : $-4x+4y+0z=d$, avec $d\in\mathbb{R}$.
$R(3\ ;\ 2\ ;\ -1)\in\mathscr{P}_1 \iff -12+8+0=d \iff d=-4$.
Donc $M(x\ ;\ y\ ;\ z)\in\mathscr{P}_1 \iff -4x+4y=-4 \iff \boxed{x - y - 1 = 0}$. 1 pt

(c) On a $E(10\ ;\ 9\ ;\ 8)\in\mathscr{P}_1 \iff 10-9-1=0$: cette égalité est vraie, donc $E\in\mathscr{P}_1$. 0,25 pt

D'autre part $\overrightarrow{EA}\begin{pmatrix}-5\\-9\\-9\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EB}\begin{pmatrix}-9\\-5\\-9\end{pmatrix}$.

On en déduit (**car repère orthonormé**) :
$EA^2=25+81+81=187$ et $EB^2=81+25+81=187$.
$EA^2=EB^2\Rightarrow EA=EB$. 0,75 pt

2. (a) On a vu que le plan $\mathscr{P}_1$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}$.

Le plan $\mathscr{P}_2$ a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

Ces deux vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires, car $\dfrac{1}{-4}\neq\dfrac{0}{4}$ donc $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont pas parallèles, ils sont donc sécants. 1 pt

(b) Si $M(x\ ;\ y;\ z)$ est commun aux deux plans ses coordonnées vérifient les équations des deux plans, donc le système :

$\left\{\begin{array}{rcl}x-y-1&=&0\\x-z-2&=&0\end{array}\right.$. En posant $z=t$ le système devient :

$$\left\{\begin{array}{rcl}x-y-1&=&0\\x-z-2&=&0\\z&=&t\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{rcl}x-1&=&y\\x&=&z+2\\z&=&t\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}x-1&=&y\\x&=&t+2\\z&=&t\end{array}\right.\iff$$

$$\left\{\begin{array}{rcl}t+2-1&=&y\\x&=&t+2\\z&=&t\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}y&=&t+1\\x&=&t+2\\z&=&t\end{array}\right.,\ \text{avec } t\in\mathbb{R}.$$ 1 pt

Remarque : on pouvait se contenter de vérifier que la droite Δ était incluse dans chacun des deux plans en prenant un point M quelconque de Δ, donc de coordonnées $(2+t;1+t;t)$, et en vérifiant qu'il appartient à $\mathscr{P}_1$, puis à $\mathscr{P}_2$.

Pour $\mathscr{P}_1$: on a bien $2+t-(1+t)-1=0$ donc $M\in\mathscr{P}_1$. (et idem avec $\mathscr{P}_2$).

3. Si $\Omega(x\ ;\ y\ ;\ z)$ est commun à la droite Δ et au plan $\mathscr{P}_3$ ses coordonnées vérifient l'équation du plan et les équations paramétriques de la droite, soit le système :

$\left\{\begin{array}{rcl}y&=&t+1\\x&=&t+2\\z&=&t\\y+z-3&=&0\end{array}\right.$. En remplaçant x, y, z par leurs expressions en fonction de t dans l'équation du plan on obtient :

$t+1+t-3=0\iff 2t-2=0\iff 2t=2\iff t=1$.

On a donc $\Omega(3\ ;\ 2\ ;\ 1)$. 1 pt

4. (a) Deux options pour répondre à cette question :

• Sans admettre que les plans $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont les plans médiateurs respectifs des segments [AB], [AC] et [AD], on peut calculer :

$\overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\Omega B}\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\Omega C}\begin{pmatrix}-2\\-2\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\Omega D}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$.

On a donc $\Omega A^2=4+4+4=12$, $\Omega B^2=12$, $\Omega C^2=12$, $\Omega D^2=12$ et par conséquent :

$\Omega A=\Omega B=\Omega C=\Omega D=\sqrt{12}=\sqrt{4\times3}=2\sqrt{3}$.

• En utilisant les plans médiateurs des segments ; comme Ω appartient à Δ, alors il appartient à $\mathscr{P}_1$ et à $\mathscr{P}_2$.
De plus il appartient à $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_3$.
Donc Ω est équidistant de A et B, mais aussi de A et C, et enfin de A et D.
Donc $\Omega A=\Omega B=\Omega C=\Omega D$. 1 pt

(b) Le résultat précédent montre que Ω est équidistant de A, B, C et D donc Ω est le centre de la sphère de rayon $2\sqrt{3}$ contenant A, B, C et D. 0,5 pt

EXERCICE 2 .... 8 pts

1. • On sait que $\lim\limits_{x\to0}x\ln x=0$ (par croissance comparée), donc $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$. 0,5 pt

• Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$, on a par produit de limites $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln x=+\infty$ et enfin $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. 0,5 pt

2. (a) La fonction f est dérivable sur $D=]0\ ;\ +\infty[$ en tant que produit et somme de fonctions dérivables sur D. En utilisant le formule de la dérivée d'un produit,
$\forall x\in]0\ ;\ +\infty[,\ f'(x)=1\times\ln(x)+x\times\dfrac{1}{x}=\ln(x)+1$ 0,5 pt

(b) $f'(x)\geqslant0\iff\ln(x)+1\geqslant0\iff\ln(x)\geqslant-1\iff x\geqslant e^{-1}$. 1,5 pt

Dans le tableau : $f\left(e^{-1}\right)=e^{-1}\ln(e^{-1})+1=-e^{-1}+1=1-e^{-1}>0$

x	0		e^{-1}		1	$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$		
$f(x)$	|| 1	$\searrow$	$1-\mathrm{e}^{-1}$	$\nearrow$	1	$+\infty$

(c) $f(1)=1$. D'après les variations de la fonction f,
— $\forall x \in]0\,;\,\mathrm{e}^{-1}]$, $f(x)\in[1-\mathrm{e}^{-1}\,;\,1[$;
— $\forall x \in [\mathrm{e}^{-1}\,;\,1]$, $f(x)\in[1-\mathrm{e}^{-1}\,;\,1]$.
Donc $\forall x \in]0\,;\,1]$, $f(x)\in\left[1-\mathrm{e}^{-1}\,;\,1\right]$. Or $1-\mathrm{e}^{-1}>0$ donc $f(x)\in]\,0\,;\,1]$ pour tout réel x dans $]0\,;\,1]$. **0,75 pt**

3. (a) La tangente (T) à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation :
$y=f'(1)(x-1)+f(1)$
Avec $f'(1)=1$ et $f(1)=1$
on en déduit l'équation de (T) : $y=x-1+1=x$, soit $\quad y=x$. **0,75 pt**

(b) Nous savons que $\forall x\in]0\,;\,+\infty[$, $f'(x)=\ln(x)+1$.
La fonction f' est continue et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, et $f''(x)=\dfrac{1}{x}>0$, donc f est convexe sur $]0\,;\,+\infty[$. **0,75 pt**

(c) La courbe représentative d'une fonction convexe est au-dessus de toutes ses tangentes. En particulier $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de (T).
Donc $\forall x\in]0\,;\,+\infty[$, $f(x)\geqslant x$. **0,5 pt**

4. Soit (u_n) la suite définie par $u_0\in]0\,;\,1]$ et $u_{n+1}=f(u_n)$.

(a) Montrons par récurrence que $0<u_n<1$ pour tout entier naturel n. **1 pt**
Initialisation : on a $u_0\in]0\,;\,1[$, donc l'encadrement est vrai au rang 0 ;
Hérédité : soit $n\in\mathbb{N}$ et supposons que $0<u_n<1$.
On a vu à la question **2. b.** que si $0<x<1$, alors $0<f(x)<1$.
Donc si $0<u_n<1$, alors $0<f(u_n)<1$, soit $0<u_{n+1}<1$.
Conclusion : l'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang $n\in\mathbb{N}$, il l'est aussi au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence pour tout entier naturel n, on a : $0<u_n<1$.

(b) D'après la question **3.c**, pour tout réel x positif, $f(x)>x$.
De plus pour tout entier naturel n, $u_n>0$
Donc, $\forall n\in\mathbb{N}$, $f(u_n)>u_n$ donc $u_{n+1}>u_n$. La suite (u_n) est donc croissante.
0,75 pt

(c) La suite (u_n) est croissante et majorée par 1. Donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge vers une limite finie notée l.
0,5 pt

Exercice 3 .... 5 pts

1. Donnons en premier le domaine de "résolution" $\mathscr{D}$.
$x\in\mathscr{D} \iff x>0 \text{et} x>10$. Donc $\quad\mathscr{D}=]10\,;\,+\infty[$.
Soit $x\in\mathscr{D}$:
$\ln(x)+\ln(x-10)=\ln(3)+\ln(7) \iff \ln(x(x-10))=\ln(3\times7) \iff x(x-10)=21$
(par croissance de la fonction logarithme népérien)
Donc $\forall x\in\mathscr{D}$, (E) $\iff x^2-10x-21=0$.
$\Delta=184>0$, donc ce trinôme admet deux solutions.
Les deux solution sont : $x_1=\dfrac{10-2\sqrt{46}}{2}=5-\sqrt{46}$ et $x_2=\dfrac{10+2\sqrt{46}}{2}=5+\sqrt{46}$.
Or $5^2=25<46$, donc $5<\sqrt{46} \iff 5-\sqrt{46}<0$ et $5-\sqrt{46}\notin\mathscr{D}$.
Par contre $\sqrt{46}>5\Rightarrow 5+\sqrt{46}>5+5=10$, donc $x_2\in\mathscr{D}$.
(E) admet donc une seule solution : $5+\sqrt{46}$. **1,5 pts**

2. $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-2-0;2-1;-1-(-1))=(-2;1;0)$.
Une représentation paramétrique de la droite (AB) est : $\left\{\begin{array}{rcl} x&=&-2k\\ y&=&1+k\\ z&=&-1\end{array}\right.$ où $k\in\mathbb{R}$
(AB) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}(-2;1;0)$, et $\mathscr{D}$ le vecteur $\overrightarrow{v}(1;1;-1)$.
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires donc (AB) et $\mathscr{D}$ ne sont pas parallèles.

Les droites (AB) et $\mathscr{D}$ sont sécantes si elles admettent un point d'intersection, autrement dit s'il existe un réel t et un réel k tels que
$\left\{\begin{array}{rcl} -2+t&=&-2k\\ 1+t&=&1+k\\ -1-t&=&-1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} -2&=&-2k\\ 0&=&k\\ t&=&0\end{array}\right.$ Il n'y a donc pas de solution.
Les droites (AB) et $\mathscr{D}$ ne sont pas sécantes.
Les deux droites n'étant ni parallèles ni sécantes, elles sont non coplanaires. **2 pts**

3. — $A(3;0)\in\mathscr{C} \iff f(3)=0 \iff (3a+b)\ln3=0 \iff 3a+b=0 \iff b=-3a$

— Soit B le pont de $\mathscr{C}$ d'abscisse 1; B(1;0).
La tangente à $\mathscr{C}$ en B(1;0) passe par le point de coord. C(0;2), donc son coefficient directeur est égale à $\dfrac{y_B-y_C}{x_B-x_C}=-2$.
Ainsi $f'(1)=-2$.

Or f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f'(x)=a\ln x+(ax+b)\times\dfrac{1}{x}$

Donc $\quad f'(1)=-2 \iff a+b=-2$

$\left\{\begin{array}{rcl} 3a+b&=&0\\ a+b&=&-2\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} b&=&-3a\\ -2a-&=&-2\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} b&=&-3\\ a-&=&1\end{array}\right.$ **1,5 pts**