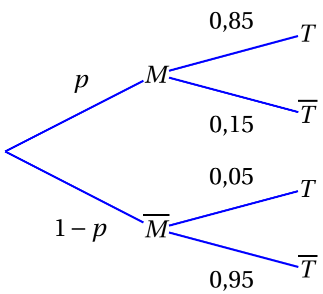
Corrigé DS n° 5

EXERCICE 1 8 pts

1. (a)



(b) D'après le théo. des probabilités totales, appliqué avec la partition $\left\{M, \overline{M}\right\}$ de l'univers, on a :

$$\begin{aligned} p(T) &= p(M\cap T) + p(\overline{M}\cap T) \\ &= p(M)\times p_M(T) + p(\overline{M})\times p_{\overline{M}}(T) \\ &= 0,85p + 0,05(1-p) \\ &= 0,8p + 0,05 \end{aligned}$$

Or $p(T) = 0,058 \iff 0,8p + 0,05 = 0,058 \iff 0,8p = 0,008 \iff p = 0,01$

2. (a) $p(M\cap T) = p(M)\times p_M(T) = 0,01\times 0,85 = 0,0085$.

(b) Il faut calculer $p_T(M) = \dfrac{p(M\cap T)}{p(T)} = \dfrac{0,0085}{0,058} \approx 0,1466$.

3. (a) On a ici un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = 0,058$.
En effet, on a une répétition de 10 expériences aléatoires identiques et indépendantes (10 tests de dépistage) à deux issues possibles :
- succès = « test positif »de probabilité 0,058.
- échec = $\overline{\text{succès}}$

Donc **le nombre de succès X** suit la loi binomiale $\mathscr{B}(10 ; 0,058)$.

(b) $p(X=2) = \dbinom{10}{2}\times 0,058^2\times(1-0,058)^8 \approx 0,0939$

(c) La probabilité pour qu'au moins un des dix animaux ait un test positif est : $p(X\geqslant 1) = 1 - p(X=0) = 1-(1-0,058)^{10} \approx 0,4498$.

(d) On cherche la valeur minimale de l'entier n tel que : $1-(1-0,058)^n \geqslant 0,75$

$$\begin{aligned} 1-(1-0,058)^n \geqslant 0,75 &\iff 1-0,942^n \geqslant 0,75 \\ &\iff 0,942^n \leqslant 0,25 \\ &\iff \ln(0,942^n) \leqslant \ln(0,25) \\ &\iff n\ln(0,942) \leqslant \ln(0,25) \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln(0,25)}{\ln(0,942)} \approx 23,2 \end{aligned}$$

D'où $n = 24$ au moins.

4.

(a) la loi de probabilité du coût à engager par animal subissant le test est donnée par le tableau suivant :

Coût	0	100	1 000
Evénement	$\overline{M}\cap\overline{T}$	T	$M\cap\overline{T}$
Probabilité	0,940 5	0,058 0	0,001 5

(b) $\mathrm{E} = 0\times 0,9405 + 100\times 0,0580 + 1000\times 0,0015 = 5,80 + 1,50 = 7,30$ €.
Ceci représente le coût moyen par animal
Pour 200 bêtes, le coût sera en moyenne de : $200\times 7,30 = 1460$ €.

EXERCICE 2 .... 6,5 pts

1. L'année 2022 est l'année 2021 + 1, donc on doit calculer u_1.
$u_1 = 0,008u_0(200-u_0) = 0,008\times 40\times 160 = 51,2$.
L'estimation est donc de 51,2 oiseaux (arrondie à 51 animaux).

2. Résolvons $f(x) = x$.

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff 0,008x(200-x) = x \\ &\iff 1,6x - 0,008x^2 = x \\ &\iff 0,008x^2 - 0,6x = 0 \\ &\iff x(0,008x - 0,6) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad\text{ou}\quad 0,008x - 0,6 = 0 \\ &\iff x = 0 \quad\text{ou}\quad x = \frac{0,6}{0,008} = 75 \end{aligned}$$

L'équation admet deux solutions dans $[0 ; 100]$: 0 et 75.

3. (a) Pour tout x entre 0 et 100, on a : $f(x) = -0,008x^2 + 1,6x$. C'est une fonction polynôme de degré 2, dont le coefficient dominant est négatif $(-0,008)$.
Le sommet de la parabole représentant la fonction définie sur $\mathbb{R}$ a pour abscisse : $\dfrac{-1,6}{2\times(-0,008)} = 100$.
La fonction définie sur $\mathbb{R}$ serait donc croissante sur l'intervalle $]-\infty ; 100]$ et décroissante sur $[100 ; +\infty[$, donc f, qui est définie sur $[0 ; 100]$ est bien strictement croissante sur $[0 ; 100]$.

(b) Pour tout entier naturel n, on pose P_n la propriété : « $0\leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100$ ».
— Initialisation : On a $u_0 = 40$ et $u_1 = 51,2$, donc on a bien $0\leqslant u_0\leqslant u_1\leqslant 100$ donc la propriété P_0 est vraie.

— Hérédité : Soit n un entier naturel . On suppose P_n vraie.

$P_n \implies 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100$

$\implies f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(100)$ $\quad f$ est croissante sur $[0~;~100]$

$\implies 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 80$ $\quad$ car $f(0) = 0$; $f(100) = 80$

$\implies 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 100$

$\implies P_{n+1}$

Ainsi, la propriété est héréditaire.

— Conclusion : La propriété P_0 est vraie, et pour un naturel n quelconque, si P_n est vraie, P_{n+1} l'est aussi donc, d'après l'axiome du raisonnement par récurrence :

$\forall n \in \mathbb{N}; \quad 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100$

On en déduit donc que la suite est bornée par 0 et 100, et qu'elle est croissante.

(c) La suite est croissante et majorée par 100, donc, d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers une limite ℓ, qui est supérieure à $u_0 = 40$ et inférieure au majorant 100.

(d) Puisque la suite est convergente et définie par récurrence et que la fonction de récurrence f est continue sur $[0~;~100]$, intervalle contenant la limite ℓ, d'après le théorème du point fixe, ℓ est une solution de l'équation $f(x) = x$.

Comme on a établi que cette équation n'a que deux solutions dans $[0~;~100]$, 0 et 75, et que l'on a établi que ℓ est comprise entre 40 et 100, il vient que $\ell = 75$.

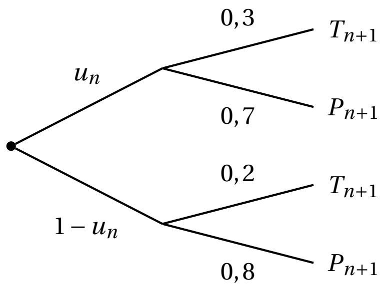
La suite converge donc vers 75.

La population d'oiseaux va se stabiliser à 75 unités.

4. Le principe de cette fonction `seuil(p)` est de renvoyer l'année où l'estimation dépasse le seuil `p`, notre suite ici est croissante et converge vers 75, donc elle est majorée par 75. Aucun terme ne dépassera donc 75, et le test de la boucle `while` sera toujours satisfait, donc on aura une fonction qui tourne de façon infinie et ne renvoie donc aucun résultat.

EXERCICE 3 .... 5,5 pts

1. (a)



(b) D'après le principe des probabilités totales :

$u_{n+1} = p(T_{n+1}) = p(T_n \cap T_{n+1}) + p(P_n \cap T_{n+1}) = u_n \times 0,3 + (1 - u_n) \times 0,2$

$u_{n+1} = 0,3u_n + 0,2 - 0,2u_n = 0,1u_n + 0,2.$

(c) La calculatrice donne $u_1 = 0,5$; $u_2 = 0,25$; $u_3 = 0,225$; $u_4 = 0,225$; $u_5 = 0,2225$.

Il semble que u_n ait pour limite $0,222\ldots$.

2. (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{2}{9}$

$$\begin{aligned}
&= 0,1u_n + 0,2 - \frac{2}{9}\\
&= 0,1u_n + \frac{1}{5} - \frac{2}{9}\\
&= 0,1u_n - \frac{1}{45}\\
&= 0,1\left(v_n + \frac{2}{9}\right) - \frac{1}{45}\\
&= 0,1v_n + \frac{2}{90} - \frac{1}{45}\\
&= 0,1\ v_n.
\end{aligned}$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison 0,1 et de premier terme :

$v_1 = u_1 - \dfrac{2}{9} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{9} = \dfrac{5}{18}$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_1 \times q^{n-1} = \dfrac{5}{18} \times 0,1^{n-1}$.

De plus $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = v_n + \dfrac{2}{9}$

donc $u_n = \dfrac{2}{9} + \dfrac{5}{18} \times 0,1^{n-1}$.

(c) Comme $0 < \dfrac{1}{10} < 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{9}$.

Or $\dfrac{2}{9} = 0,222\ldots$ ce qui valide la conjecture faite à la question 1. c.