EXERCICE 1 **8 points**

Dans cet exercice, les résultats approchés seront donnés à $0,0001$ près.

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.
Un test est mis au point et essayé sur un échantillon important d'animaux.
On obtient alors les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

De plus, le test a donné un résultat positif dans 5,8 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.

On note : M l'évènement : « l'animal est porteur de la maladie » ;
T l'évènement : « le test est positif ».

1. On note p la probabilité de l'évènement M.
   a. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.
   b. Déterminer la valeur de p.
2. On suppose dans la suite que $p = 0,01$.
   a. Un animal est choisi au hasard. Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?
   b. Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie ?
3. On choisit dix animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'animaux ayant un test positif parmi les dix choisis.
   a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Justifier la réponse.
   b. Quelle est la probabilité que deux animaux exactement parmi les dix présentent un test positif ?
   c. Quelle est la probabilité qu'au moins un des dix animaux ait un test positif ?
   d. Quel nombre minimum d'animaux aurait-il fallu choisir au hasard pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux ait un test positif soit supérieure ou égale à 0,75 ?
   ☞ on pourra déterminer la solution en utilisant la calculatrice. (donner la démarche)
4. Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 euros et le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1000 euros. Un animal non dépisté par le test mais n'ayant pas développé la maladie n'engendre aucun coût. On suppose que le test est gratuit.
   On note Y la variable aléatoire associant à un animal le coût à engager.
   a. A l'aide d'un tableau, donner la loi de probabilité de la variable aléatoire Y.
   b. Un éleveur possède un troupeau de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d'engager ?

Tournez svp !

EXERCICE 2 **6,5 pts**

Au début de l'année 2021, une colonie d'oiseaux comptait 40 individus. L'observation conduit à modéliser l'évolution de la population par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 40 \\ u_{n+} & = & 0,008u_n(200-u_n) \end{array}\right.$$

où u_n désigne le nombre d'individus au début de l'année $(2021+n)$.

1. Donner une estimation du nombre d'oiseaux dans la colonie au début de l'année 2022.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,100]$ par $f(x) = 0,008x(200-x)$.

2. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,100]$ l'équation $f(x) = x$.
3. **a.** Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,100]$ et dresser son tableau de variations.

   b. Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100$.

   c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

   d. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n). Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. On considère l'algorithme suivant :

```
def seuil(p) :
    n=0
    u = 40
    while u < p :
      n =n+1
      u = 0.008*u*(200-u)
    return(n+2021)
```

   L'exécution de seuil(100) ne renvoie aucune valeur. Expliquer pourquoi à l'aide de la question 3.

EXERCICE 3 **5,5 points**

Dans un zoo, l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongeoir.

On a observé que si un manchot choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est $0,3$.
Si un manchot choisit le plongeoir, la probabilité qu'il le reprenne est $0,8$.

Lors du premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.

Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'évènement :

— T_n : « le manchot utilise le toboggan lors de son n-ième passage. »

— P_n : « le manchot utilise le plongeoir lors de son n-ième passage. »

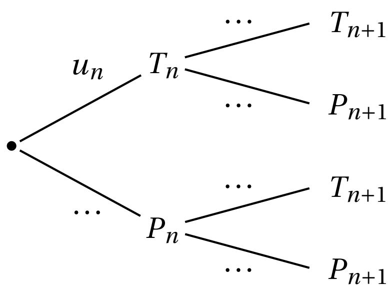
On considère alors la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = p(T_n)$$

où $p(T_n)$ est la probabilité de l'évènement T_n.

Suite en page 3 !

1. **a.** Recopier et compléter l'arbre suivant :



   b. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 0,1u_n + 0,2$.

   c. À l'aide de la calculatrice, émettre une conjecture concernant la limite de la suite (u_n).

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$v_n = u_n - \frac{2}{9}.$$

   a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{10}$. Préciser son premier terme.

   b. Exprimer v_n en fonction de n. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

   c. Calculer la limite de la suite (u_n). Ce résultat permet-il de valider la conjecture émise en **1. c.** ?