Corrigé DS n° 4

EXERCICE 1

Partie A

$g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln x$

1. $g'(x) = 6x^2 + \dfrac{2}{x} > 0$, car somme de nombres strict. positifs sur $]0\,;+\infty[$

   La fonction g est donc strict. croissante sur $]0\,;+\infty[$.

   Tableau de variations :

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$	‖		$+$		
$g(x)$	‖	$-\infty$ ↗	0	↗	$+\infty$

   Justification des limites :

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to+\infty} (2x^3-1) & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2\ln x & = & +\infty \end{array}\right\} \underset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \lim_{+\infty} g = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to 0} (2x^3-1) & = & -1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} 2\ln x & = & -\infty \end{array}\right\} \underset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \lim_{+\infty} g = -\infty$$

2. La fonction g est continue (comme somme de fonctions continues) et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$. L'intervalle image de $]0;+\infty[$ par f est $\mathbb{R}$, qui contient 0. Donc d'après le théo. de la bijection, on en déduit que 0 possède donc un unique antécédent par g, que l'on notera α.

   A la calculatrice on obtient par balayage : $\boxed{\alpha \approx 0{,}86}$

3. Signe de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$:

$$\left\{\begin{array}{l} 0 < x < \alpha \Longrightarrow g(x) < g(\alpha) = 0 \\ x > \alpha \Longrightarrow g(x) > g(\alpha) = 0 \end{array}\right.$$

Partie B

$$f(x) = 2x - \frac{\ln x}{x^2}$$

1. • Limite de la fonction f en 0 :

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to 0^+} -\ln x & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2} & = & +\infty \end{array}\right\} \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 0^+} \frac{-\ln x}{x^2} = +\infty$$

   De plus $\lim\limits_{x\to 0^+} 2x = 0$ d'où par somme $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty}$

   • Limite de la fonction f en $+\infty$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$ (*croissances comparées*) et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$

   d'où par somme $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

2. $f'(x) = 2 - \dfrac{\frac{1}{x}x^2 - 2x\ln x}{x^4} = \dfrac{2x^4 - x + 2x\ln x}{x^4} = \dfrac{2x^3 - 1 + 2\ln x}{x^3} = \dfrac{g(x)}{x^3}$

   $f'(x)$ a même signe que $g(x)$ car x^3 est strictement positif sur $]0;+\infty[$.

3. Tableau de variations de la fonction f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

4. (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (h(x)) = \lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - 2x\big) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$

   (b) La courbe $\mathscr{C}$ admet pour asymptote oblique la droite Δ d'équation $y = 2x$

   (c) • Le signe de $f(x) - 2x = -\dfrac{\ln x}{x^2}$ est celui de $-\ln x$, car $x^2 > 0$

   • Position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite Δ :

   — Sur $]0;1[$, $-\ln x > 0$, $\mathscr{C}$ est au dessus de Δ,

   — sur $]1;+\infty[$, $-\ln x < 0$, $\mathscr{C}$ est en dessous de Δ,

   — $\mathscr{C}$ et Δ ont un point commun $A(1,2)$.

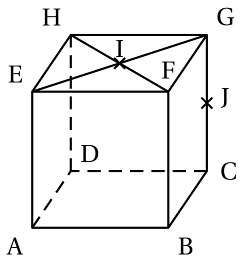
   (d) $g(\alpha) = 0 \iff 2\alpha^3 - 1 + 2\ln\alpha = 0 \iff \ln\alpha = \dfrac{1 - 2\alpha^3}{2}$

   D'où $f(\alpha) = 2\alpha - \dfrac{\ln\alpha}{\alpha^2} = 2\alpha - \dfrac{1-2\alpha^3}{2\alpha^2} = 2\alpha - \dfrac{1}{2\alpha^2} + \dfrac{2\alpha^3}{2\alpha^2} = 3\alpha - \dfrac{1}{2\alpha^2}$

EXERCICE 2

1. Notons (I) l'inéquation $\ln(x+3) < 2\ln(x+1)$.
D'après l'énoncé il faut que $x > -3$ et que $x > -1$. Il faut donc résoudre l'inéquation dans l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$.
Soit $x \in]-1\ ;\ +\infty[$.
$$\begin{aligned}\ln(x+3) < 2\ln(x+1) &\iff \ln(x+3) < \ln(x+1)^2\\ &\iff x+3 < (x+1)^2\\ &\iff 0 < x^2+2x+1-x-3\\ &\iff 0 < x^2+x-2.\end{aligned}$$
Le trinôme x^2+x-2 a une racine évidente 1 ; comme le produit des racines est égal à -2, l'autre racine est -2. On a donc :
$x^2+x-2>0 \iff (x-1)(x+2)>0$: le trinôme est positif "à l'extérieur des racines -2 et 1.
Or $x \in]-1\ ;\ +\infty[$, d'où : $\quad S =]1\ ;\ +\infty[$.
2. $\forall x \in]0;+\infty[$, $f''(x)$ a le signe de $\ 1+2\ln x$.
Or, $\forall x \in]0;+\infty[$, $1+2\ln x > 0 \iff \ln x > \dfrac{-1}{2} \iff x > \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.
Donc f est convexe sur $\left]\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}};+\infty\right[$

EXERCICE 3



a/ $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{FB} = (\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EI})\cdot\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{FB}$

or $\quad \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{FB} = -\overrightarrow{AE}^2 = -a^2$

et $\quad \overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{FB} = 0 \quad$ car $\ (FB)\perp(EFG)$ et $(EI)\subset(EFG)$

Conclusion : $\quad \overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{FB} = -a^2$

b/ $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{DB} = (\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{GJ})\cdot\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{IG}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{GJ}\cdot\overrightarrow{DB}$

or $\quad \overrightarrow{IG}\cdot\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{IG}\cdot\overrightarrow{HF} = 0\ $ (perpendicularités des diagonales d'un carré)

et $\quad \overrightarrow{GJ}\cdot\overrightarrow{DB} = 0 \quad$ car $\ (GJ)\perp(ABC)$ et $(DB)\subset(ABC)$

Conclusion : $\quad \overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{DB} = 0$

EXERCICE 4

1. $\overrightarrow{AB} : \begin{pmatrix}3-2\\-1-(-1)\\2-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} : \begin{pmatrix}0-2\\4-(-1)\\1-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix}$ donc
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 1\times(-2)+0\times5+1\times2 = 0$ donc $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$.
Le triangle ABC est donc rectangle en A.
2. (a) • Montrons que la droite (SH) est orthogonale au plan (ABC).
Il suffit de montrer que $\overrightarrow{SH}$ est orthogonal à deux vecteurs de base du plan (ABC).
$\overrightarrow{SH} : \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc ce sont deux vecteurs directeurs du plan (ABC).
   - $\overrightarrow{SH}\cdot\overrightarrow{AB} = 2\times1+1\times0+(-1)\times2 = 0$ donc $\overrightarrow{SH}\perp\overrightarrow{AB}$.
   - $\overrightarrow{SH}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times(-2)+1\times5+(-1)\times1 = -4+5-1 = 0$ donc $\overrightarrow{SH}\perp\overrightarrow{AC}$.

   Le vecteur $\overrightarrow{SH}$ est orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, donc il est orthogonal au plan (ABC).

   • Montrons que les vecteurs $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.
On cherche s'il existe deux réels α et β tels que : $\overrightarrow{AH} = \alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$.
$$\overrightarrow{AH} = \alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC} \iff \left\{\begin{array}{rcl}0&=&\alpha-2\beta\\3&=&5\beta\\3&=&2\alpha+\beta\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}\alpha&=&\dfrac{6}{5}\\\beta&=&\dfrac{3}{5}\\3&=&\dfrac{12}{5}+\dfrac{3}{5}\end{array}\right.$$
La dernière égalité est vraie donc on a : $\overrightarrow{AH} = \dfrac{6}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

   • Bilan :
H appartient au plan (ABC) car $\overrightarrow{AH}$ est coplanaire à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
De plus (SH) est orthogonale au plan (ABC).
Donc H est le projeté orthogonal de S sur (ABC).

   (b) La distance du point S au plan (ABC) est donc égale à SH.
$\mathrm{SH}^2 = (2-0)^2+(2-1)^2+3-4)^2 = 6$ donc $\mathrm{SH} = \sqrt{6}$ $\quad$ donc $\mathrm{SH} = \sqrt{6}$.
3. $\mathcal{V} = \dfrac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.

- La base est le triangle ABC rectangle en A dont l'aire vaut $\mathcal{A} = \dfrac{\text{AB} \times \text{AC}}{2}$.
  $\text{AB}^2 = 2^2 + 0^2 + 2^2 = 5$ donc $\text{AB} = \sqrt{5}$
  $\text{AC}^2 = (-2)^2 + 5^2 + 1^2 = 30$ donc $\text{AC} = \sqrt{30}$
  $\mathcal{A} = \dfrac{\sqrt{5} \times \sqrt{30}}{2} = \dfrac{\sqrt{150}}{2} = \dfrac{5\sqrt{6}}{2}$
- La hauteur est $\text{SH} = \sqrt{6}$
- $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{A} \times \text{SH} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{5\sqrt{6}}{2} \times \sqrt{6} = 5$ unité de volume du repère.

4. (a) $\overrightarrow{\text{SB}} : \begin{pmatrix} 3-0 \\ 1-(-1) \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{\text{SA}} \cdot \overrightarrow{\text{SB}} = 3 \times 2 + (-2) \times (-2) + (-2) \times (-4) = 18$

   (b) $\overrightarrow{\text{SA}} : \begin{pmatrix} 2-0 \\ -1-1 \\ 0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$
   donc $\text{SA}^2 = 2^2 + (-2)^2 + (-4)^2 = 24$ donc $\text{SA} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$
   De même on calcule $\text{SB} = \sqrt{17}$.

   $\overrightarrow{\text{SA}} \cdot \overrightarrow{\text{SB}} = \text{SA} \times \text{SB} \times \cos\left(\widehat{\text{ASB}}\right)$
   Donc $18 = 2\sqrt{6} \times \sqrt{17} \times \cos\left(\widehat{\text{ASB}}\right)$

   et donc $\cos\left(\widehat{\text{ASB}}\right) = \dfrac{18}{2\sqrt{6} \times \sqrt{17}} = \dfrac{9}{\sqrt{102}}$
   On en déduit que $\widehat{\text{ASB}} \approx 27{,}0°$.

EXERCICE 5

Soit I le milieu de [BC].

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \cdot (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID}) = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{ID}$

Or ABC et BDC sont des triangles équilatéraux (ABCD tétraèdre régulier).
Donc les médianes [AI] et [DI] de ces triangles sont aussi des hauteurs.
Donc $(BC) \perp (AI)$ et $(BC) \perp (DI)$

Ainsi $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{ID} = 0 + 0 = 0$

Donc (BC) et (AD) sont orthogonales.

EXERCICE 6

1. La demi-vie correspond à l'instant t pour lequel $N(t) = \dfrac{1}{2} N_0$.

   Or
   $$\begin{aligned} N(t) = \frac{1}{2} N_0 &\iff e^{-\lambda t} = \frac{1}{2} \\ &\iff -\lambda t = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ &\iff -\lambda t = -\ln 2 \\ &\iff t = \frac{\ln 2}{\lambda} \end{aligned}$$
   Donc $T_{\frac{1}{2}} = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$

2. Pour tout entier n,
   $$\begin{aligned} \text{N}(t + n\text{T}_{\frac{1}{2}}) &= N_0\, e^{-\lambda\left(t + n\text{T}_{\frac{1}{2}}\right)} \\ &= N_0\, e^{-\lambda t - \lambda n \text{T}_{\frac{1}{2}}} \\ &= N_0\, e^{-\lambda t}\, e^{-\lambda n \text{T}_{\frac{1}{2}}} \\ &= N(t) \left(e^{-\lambda \text{T}_{\frac{1}{2}}}\right)^n \\ &= N(t) \left(e^{-\lambda \frac{\ln 2}{\lambda}}\right)^n \\ &= N(t) \left(e^{-\ln 2}\right)^n \\ &= N(t) \left(e^{\ln \frac{1}{2}}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{N}(t) \end{aligned}$$