Barème sur 25 points

EXERCICE 1 **10 pts**

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln x$

1. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
2. Justifier qu'il existe un unique réel α de $]0\,;\,+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
3. En déduire le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
4. Donner une valeur approchée de α, arrondie au centième.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = 2x - \dfrac{\ln x}{x^2}$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. Justifier que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.
3. En déduire le tableau de variations de la fonction f.
4. Soit Δ la droite d'équation $y = 2x$.
   - **a.** Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x) = f(x) - 2x$
   - **b.** Quelle interprétation peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ ?
   - **c.** Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite Δ.
5. Montrer que $f(\alpha) = 3\alpha - \dfrac{1}{2\alpha^2}$

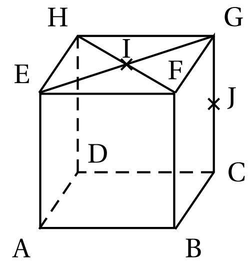
EXERCICE 2 **3 pts**

les deux questions suivantes sont indépendantes

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I) : $\ln(x+3) \leqslant 2\ln(x+1)$
2. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$ telle que $f''(x) = \dfrac{1+2\ln x}{x^3}$
   Déterminer le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.

EXERCICE 3 **2 pts**

ABCDEFGH est un cube d'arête a. I est le le centre de la face EFGH, et J est le milieu de l'arête [GC]



Calculer les produits scalaires suivants **sans utiliser de repère!**

a/ $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{FB}$ **b/** $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{DB}$

EXERCICE 4 — 6 pts

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points suivants :

$$A(2\,;\,-1\,;\,0),\ \ B(3\,;\,-1\,;\,2),\ \ C(0\,;\,4\,;\,1)\ \text{ et }\ S(0\,;\,1\,;\,4).$$

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

2. On considère le point H(2 ; 2 ; 3)

   a. Montrer que H est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC).

   b. En déduire la distance du point S au plan (ABC).

3. On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est $V = \dfrac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.

Calculer le volume du tétraèdre SABC.

4. On veut déterminer une mesure de l'angle $\widehat{\text{ASB}}$

   a. Calculer $\overrightarrow{\text{SA}} \cdot \overrightarrow{\text{SB}}$

   b. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{\text{ASB}}$ approchée au dixième de degré.

EXERCICE 5 — 2 pts

ABCD est un tétraèdre régulier (c'est à dire que ses quatre faces sont des triangles équilatéraux). Montrer que les droites (BC) et (AD) sont orthogonales.

EXERCICE 6 — 2 pts

On s'intéresse dans cet exercice à la désintégration de noyaux d'uranium radioactifs.
On admet que le nombre moyen $\mathrm{N}(t)$ de noyaux non encore désintégrés à l'instant t $(t \geqslant 0)$ est égal à :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

où N_0 est le nombre initial de noyaux, et où λ est un réel strictement positif.

1. La demi-vie d'une élément radioactif est l'instant noté $\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}$ auquel la moitié des noyaux se seront désintégrés.

Montrer que $\mathrm{T}_{\frac{1}{2}} = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$

2. Montrer que : pour tout entier n, $\mathrm{N}(t + n\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}) = (\dfrac{1}{2})^n\, \mathrm{N}(t)$