Corrigé DS n° 3

Exercice 1

1. • $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}(-2x) = -\infty$ (limite **à l'infini** d'une **fonction rationnelle**)

   De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(-2x) = +\infty$

   • tableau de signe de $x-3$:

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	0	$+$	

   • $$\left.\begin{array}{lcl}\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}}(x-3) & = & 0^-\\ \lim\limits_{x\to3}(-2x^2+9x-17) & = & -8\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} f(x) = +\infty$$

   $$\left.\begin{array}{lcl}\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}}(x-3) & = & 0^+\\ \lim\limits_{x\to3}(-2x^2+9x-17) & = & -8\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} f(x) = -\infty$$

2. $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} f(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x=3$ est asymptote à $(\mathscr{C})$

3. (a) $\forall x \in D_f$, $f'(x) = \dfrac{(-4x+9)(x-3)-(1)(-2x^2+9x-17)}{(x-3)^2}$

   $= \ldots = \dfrac{-2x^2+12x-10}{(x-3)^2}$

   (b) Tableau de variations de f :

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
$-2x^2+12x-10$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$(x-3)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-11	↘	$-\infty$

Exercice 2

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

   d'où : $3 \leqslant \sin x + 4 \leqslant 5$

   d'où : $\dfrac{1}{3} \geqslant \dfrac{1}{\sin x+4} \geqslant \dfrac{1}{5}$ (fonction inverse décroissante sur $]0;+\infty[$)

   d'où pour x négatif (vu que l'on cherche la limite en $-\infty$) :

   $\dfrac{5x}{3} \leqslant \dfrac{5x}{\sin x+4} \leqslant x$

   Or $\lim\limits_{x\to-\infty}(x) = -\infty$ d'où par comparaison : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

2. $g(x) = \dfrac{2x+3-x^2e^x}{e^x-1}$.

   $$\left.\begin{array}{lcl}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2e^x\right) & = & 0 \text{ (croissance comparée)}\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(2x+3) & = & -\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x+3-x^2e^x\right) = -\infty$$

   $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x\right) = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-1\right) = -1$

   D'où par quotient $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(g(x)\right) = +\infty$

3. $h(x) = \dfrac{x\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-2x} = \dfrac{x\left(\sqrt{x}+\frac{4}{x}\right)}{x\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-2\right)} = \dfrac{\sqrt{x}+\frac{4}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}-2}$.

   $$\left.\begin{array}{lcl}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}+\dfrac{4}{x}\right) & = & +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-2\right) & = & -2\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(h(x)) = -\infty$$

Exercice 3

1. (a) $f(x) = (x+2)e^{-x} = \dfrac{x+2}{e^x} = \dfrac{x}{e^x} + \dfrac{2}{e^x}$

   $$\left.\begin{array}{lcl}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{e^x}\right) & = & 0 \text{ (croissance comparée)}\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{e^x}\right) & = & 0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

   Donc l'axe des abscisses d'équation $y=0$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

   (b) $f(x)=0 \iff (x+2)e^{-x}=0 \iff x+2=0 \iff x=-2$

   Donc la courbe coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse -2.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = (1)\mathrm{e}^{-x} + (x+2)(-\mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{-x}(1-x-2) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$
$f'(-2) = \mathrm{e}^2$ et $f(-2) = 0$

Equation de la tangente T_{-2} :
$$y = \mathrm{e}^2(x-(-2))+0$$
$$y = \mathrm{e}^2(x+2)$$
$$y = \mathrm{e}^2 x + 2\mathrm{e}^2$$

2. (a)
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0}(x) = 0 \\ \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty}(1+\mathrm{e}^X) = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} h(x) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0}(x) = 0 \\ \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} \dfrac{1}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty}(1+\mathrm{e}^X) = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\left(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} h(x) = 0$$

(b) Donc h est continue en zéro car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} h(x) = h(0)$

EXERCICE 4 Soit, pour $x \in D =]0;+\infty[$, $f(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{x}$

$\forall x \in D,\ \mathrm{e}^x = \dfrac{1}{x} \iff f(x) = 0$

- f est continue sur D en tant que somme de fonctions continues sur D.
- $\forall x \in D, f'(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x^2} > 0$. f est donc strictement croissante sur D.
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = -\infty$ car $\mathrm{e}^0 = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} -\dfrac{1}{x} = -\infty$

  $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

  Donc l'intervalle image de D par f est $\mathbb{R}$ qui contient 0.

- Donc d'après le théo. de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur D.

On trouve à la calculatrice (par balayage ou dichotomie) : $0{,}567 < \alpha < 0{,}568$

EXERCICE 5

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\6\\2\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\6\\4\end{pmatrix}$

   $\dfrac{y_{\overrightarrow{AC}}}{y_{\overrightarrow{AB}}} = \dfrac{6}{6} = 1 \qquad \dfrac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} = \dfrac{4}{2} = 2 \neq 1$

   $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C non alignés définissent un plan.

2. Montrons que $\overrightarrow{MN}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, et $\overrightarrow{AC}$.

   $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

   On cherche un couple de réels $(\alpha;\beta)$ tels que : $\overrightarrow{MN} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$

   $\overrightarrow{MN} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} \iff \left\{\begin{array}{lcl} 0\alpha - 3\beta & = & -1 \\ 6\alpha + 6\beta & = & 1 \\ 2\alpha + 4\beta & = & 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl}\alpha & = & -\dfrac{1}{6} \\ \beta & = & \dfrac{1}{3}\end{array}\right.$

   Ainsi $\overrightarrow{MN} = -\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \dfrac{3}{1}3\overrightarrow{AC}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont coplanaires.

3. Testons si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont coplanaires.

   $\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}$

   On cherche un couple de réels $(\alpha;\beta)$ tels que : $\overrightarrow{AN} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$

   $\overrightarrow{AN} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} \iff \left\{\begin{array}{lcl} 0\alpha - 3\beta & = & 1 \\ 6\alpha + 6\beta & = & 4 \\ 2\alpha + 4\beta & = & 3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl}\alpha & = & 1 \\ \beta & = & -\dfrac{1}{3} \\ 2 - \dfrac{4}{3} & = & 3\end{array}\right.$

   Il n'y a pas de solution car $2 - \dfrac{4}{3} \neq 3$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN}$ ne sont pas coplanaires, donc le point N n'appartient pas au plan (ABC).

4. La droite (MN) est parallèle au plan (ABC) car le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est coplanaire à $\overrightarrow{AB}$, et $\overrightarrow{AC}$. Comme de plus le point N n'appartient pas au plan (ABC), on peut préciser que (MN) est strictement parallèle au plan (ABC) (car non incluse dans ce plan).

EXERCICE 6 $\overrightarrow{AR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AS}=3\overrightarrow{DC}+2\overrightarrow{DB}$

Sans utiliser de coordonnées :

1. Justifier que $\overrightarrow{DR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$
2. Exprimer de même $\overrightarrow{DS}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, et $\overrightarrow{AD}$.
3. Que peut-on en déduire pour les points D, R, et S?

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{RS} &= \overrightarrow{RH}+\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{DS}\\
&= \frac{3}{4}\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{HD}+\frac{3}{4}\overrightarrow{DC}\\
&= \frac{3}{4}(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DH})+\overrightarrow{HD}+\frac{3}{4}\overrightarrow{DC}\\
&= \frac{3}{4}\overrightarrow{ED}-\frac{3}{4}\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{HD}+\frac{3}{4}\overrightarrow{DC}\\
&= \frac{3}{4}(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC})+\frac{1}{4}\overrightarrow{HD}\\
&= \frac{3}{4}\overrightarrow{EC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{HD}
\end{aligned}$$

EXERCICE 7

- Déterminons les coordonnées du point d'intersection N de $\mathscr{C}$ et T_a, tangente à $\mathscr{C}$ en M.

  Equation de T_a : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ soit $y=\mathrm{e}^a(x-a)+\mathrm{e}^a$.

  $y=0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^a(x-a)+\mathrm{e}^a=0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^a(x-a+1)=0 \Leftrightarrow x-a+1=0 \Leftrightarrow x=1-a$

- Calculons la distance PN : $P(a;0)$ $N(1-a;0)$ $PN=1=$ constante.