Indication de barème sur 20 (+2) points

Exercice 1 — 4 pts

Soit la fonction f définie sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $f(x) = \dfrac{-2x^2 + 9x - 17}{x - 3}$
Soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. 2 pts
2. Peut-on en déduire la présence d'asymptote à la courbe $\mathscr{C}$? 0,5 pt
3. **a.** Montrer que, pour tout réel $x \neq 3$, on a : $f'(x) = \dfrac{-2x^2 + 12x - 10}{(x-3)^2}$ 0,5 pt

   b. Dresser le tableau de variation de f sur D_f en y indiquant les limites. 1 pt

Exercice 2 — 3,75 pts

Déterminer les limites en "a" de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{5x}{\sin x + 4}$ en a$= -\infty$.
2. $g(x) = \dfrac{2x + 3 - x^2 e^x}{e^x - 1}$ en a$= -\infty$.
3. $h(x) = \dfrac{x\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} - 2x}$ en a$= +\infty$.

Exercice 3 — 4,5 points

Dans cet exercice, les deux questions sont indépendantes.

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)e^{-x}$
   Soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

   a. Justifier que $\mathscr{C}$ admet une asymptote dont vous préciserez une équation. 1,5 pts

   b. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point où cette courbe coupe l'axe des abscisses. 1,25 pts

2. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ si $x \neq 0$ et $h(0) = 0$.

   a. Déterminer les limites de h à gauche et à droite de zéro. 1,5 pts

   b. La fonction h est-elle continue en zéro ? 0,25 pt

Exercice 4 — 2,5 pts

Montrer que l'équation $e^x = \dfrac{1}{x}$ admet une solution unique α sur $]0;+\infty[$, puis donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}.

Tournez svp !

EXERCICE 5 **3,5 pts**

Dans un repère de l'espace, on considère les points :

$A(1;-2;-1)$, $B(1;4;1)$, $C(-2;4;3)$, $M(3;1;1)$, et $N(2;2;2)$.

1. Justifier que les points A, B et C définissent un plan. 0,5 pt
2. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont coplanaires. 1,5 pts
3. Le point N appartient-il au plan (ABC) ? Justifier votre réponse. 1 pt
4. Que peut-on en déduire pour la droite (MN) ? 0,5 pt

EXERCICE 6 **1,75 pts**

On considère un tétraèdre $ABCD$.
Les points R et S sont définis par : $\overrightarrow{AR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AS} = 3\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{DB}$

Sans utiliser de coordonnées :

1. Justifier que $\overrightarrow{DR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$ 0,25 pt
2. Exprimer de même $\overrightarrow{DS}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, et $\overrightarrow{AD}$. 1 pt
3. Que peut-on en déduire pour les points D, R, et S ? 0,5 pt

EXERCICE 7 **2 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction exponentielle $x \to \mathrm{e}^x$.
Pour tout point M d'abscisse a appartenant à $\mathscr{C}$, on considère le point P de coordonnées $(a\,;\,0)$ et le point N, point d'intersection de la tangente en M à $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

Montrer que la distance PN est constante.