Corrigé DS n° 2

Exercice 1

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2023(-2)(1-2x)^{2022} = -4046(1-2x)^{2022}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 5(x^4+2)^{-5}$ d'où $g'(x) = 5(-5)(4x^3)(x^4+2)^{-6} = \dfrac{-100x^3}{(x^4+2)^6}$

Exercice 2

Partie I

1. **Faux** car $f(x) > 0$ sur $[2;6]$, donc si $g' = f$, g est strict. croissante sur $[2;6]$.
2. **Vrai** car f, donc g', est décroissante sur $[2;6]$, donc g est concave sur $[2;6]$.
3. **Faux** car f est strict. décroissante sur $[2;6]$.
4. **Vrai** car si $g' = f$, alors $g'' = f'$, et $f'(x)$ (donc $g''(x)$) s'annule en changeant de signe en $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. Donc la courbe de g admet un point d'inflexion..

Partie II

1.
   - La droite $\mathscr{T}_A$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A de coordonnées $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\ ;\ \mathrm{e}\right)$; elle a donc comme coefficient directeur $f'\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

     La droite $\mathscr{T}_A$ est parallèle à l'axe des abscisses donc son coefficient directeur est nul.

     On peut donc déduire que $f'\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = 0$.
   - La droite $\mathscr{T}_B$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B de coordonnées $(1\,;\,2)$, donc elle a pour coefficient directeur $f'(1)$.

     La droite $\mathscr{T}_B$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3\,;0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,;3)$, donc on peut en déduire que son coefficient directeur est $\dfrac{3-0}{0-3} = -1$.

     On a donc $f'(1) = -1$.
2. La droite $\mathscr{T}_B$ a pour coefficient directeur -1 et 3 pour ordonnée à l'origine, donc elle a pour équation : $y = -x+3$.

Exercice 3

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

   $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = (1)\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right) + (x)\left(-2x\mathrm{e}^{-x^2}\right) = (1-2x^2)\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right)$

   f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

   $$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) &= (-4x)\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right) + \left(1-2x^2\right)\left(-2x\mathrm{e}^{-x^2}\right)\\ &= (-6x+4x^3)\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right)\\ &= 2x(2x^2-3)\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right)\end{aligned}$$
2. On dresse le tableau de signe de $f''(x)$:

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x^2-3$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
e^{-x^2}		$+$		$+$		$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

- f est convexe sur $\left[-\sqrt{\frac{3}{2}};0\right]$ et sur $\left[\sqrt{\frac{3}{2}};+\infty\right[$
- f est concave sur $\left]-\infty;-\sqrt{\frac{3}{2}}\right]$ et sur $\left[0;\sqrt{\frac{3}{2}}\right]$

Sa courbe admet trois points d'inflexion d'abscisses $-\sqrt{\frac{3}{2}}$, 0, et $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Exercice 4

- $\mathscr{C}_1$ ne peut pas être la courbe de f, car f' serait alors négative, puis positive et enfin négative, et aucune des deux autres courbes ne correspond à ces signes.
  $\mathscr{C}_1$ ne peut pas être la courbe de f', car sa dérivée f'' serait de même négative, puis positive et enfin négative, et aucune des deux autres courbes ne correspond à ces signes.
  Donc $\mathscr{C}_1$ est la courbe de f''.
- $\mathscr{C}_2$ ne peut pas être la courbe de f, car sa dérivée serait négative puis positive, et cela ne correspond pas à la fonction représentée par la courbe $\mathscr{C}_3$. Donc $\mathscr{C}_3$ est la courbe de f.
  Et enfin $\mathscr{C}_2$ est la courbe de f'.

EXERCICE 5

1. (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de la forme $\sqrt{u}$ avec u dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+8}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+8}}$

$f'(1) = \dfrac{1}{3}$ et $f(1) = 3$.

Equation réduite de T_1 : $y = \dfrac{1}{3}(x-1)+3 = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{8}{3} = \dfrac{x+8}{3}$

(b) f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient, défini sur $\mathbb{R}$, de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = \dfrac{(1)(\sqrt{x^2+8}) - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+8}}(x)}{\sqrt{x^2+8}^2}$$
$$= \dfrac{\dfrac{\left(\sqrt{x^2+8}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2+8}}}{x^2+8}$$
$$= \dfrac{\dfrac{x^2+8-x^2}{\sqrt{x^2+8}}}{x^2+8}$$
$$= \dfrac{8}{(x^2+8)\sqrt{x^2+8}}$$

(c) f est convexe sur $\mathbb{R}$ car $f''(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.
Donc sa courbe est au-dessus de toute ses tangentes, donc de T_1.
On a donc, pour tout réel x : $\sqrt{x^2+8} \geqslant \dfrac{x+8}{3}$.

2. Soit a un réel. Equation réduite de T_a : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

$$O \in T_a \iff 0 = f'(a)(0-a) + f(a) \iff 0 = -af'(a) + f(a)$$
$$\iff -a\dfrac{a}{\sqrt{a^2+8}} + \sqrt{a^2+8} = 0$$
$$\iff \dfrac{-a^2 + \sqrt{a^2+8}^{\,2}}{\sqrt{a^2+8}} = 0$$
$$\iff \dfrac{8}{\sqrt{a^2+8}} = 0$$

Cette équation n'a pas de solution (car $8 \neq 0$), donc il n'existe aucune tangente à $\mathscr{C}_f$ passant par l'origine du repère.