Corrigé DS n° 1

Exercice 1 **6 pts**

1. On cherche a et b tel que $f(0)=1$ et $f'(0)=-3$
   - $f(0)=a=1$
   - f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$ et

     $$\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x)=\frac{b(x^2+1)-2x(bx)}{((x^2+1)^2}=\frac{b-bx^2}{(x^2+1)^2}$$

     d'où $f'(0)=b=-3$
   - bilan : $\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=1-\dfrac{3x}{x^2+1}$ 2,25 pts

2. $\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=1-\dfrac{3x}{x^2+1}=\dfrac{x^2+1}{x^2+1}-\dfrac{3x}{x^2+1}=\dfrac{x^2-3x+1}{x^2+1}$ 0,5 pts

3. $\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x)=\dfrac{3x^2-3}{(x^2+1)^2}$ 0,5 pts

   Tableau de variations de f : 1,25 pts

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$(x^2+1)^2$		$+$		$+$		$+$	
$3x^2-3$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	

4. La droite $\mathscr{D}$ a pour coefficient directeur -3. Donc on cerche x tel que $f'(x)=-3$.

$$\begin{aligned}
\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=-3 &\iff \frac{3x^2-3}{(x^2+1)^2}=-3\\
&\iff 3x^2-3=-3((x^2+1)^2)\\
&\iff 3x^2-3=-3(x^4+2x^2+1)\\
&\iff 3x^2-3=-3x^4-6x^2-3\\
&\iff 3x^4+9x^2=0\\
&\iff 3x^2(x^2+3)=0\\
&\iff x^2=0 \quad\text{ou}\quad x^2=-3\\
&\iff x=0
\end{aligned}$$

Donc Le seul point de $\mathscr{C}_f$ en lequel la tangente est parallèle à $\mathscr{D}$ est le point d'abscisse 0.
Or on a $f(0)=1$. Donc cela correspond bien au point $J(0;1)$. 1,5 pts

Exercice 2 **4,5 pts**

1. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n-6=\dfrac{6n-2}{n+1}-6=\dfrac{-8}{n+1}<0$
   Donc on a bien $u_n<6$ pour tout entier n.

   $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n-(-2)=\dfrac{6n-2}{n+1}+2=\dfrac{8n}{n+1}\geqslant 0$
   Donc on a bien $u_n\geqslant -2$ pour tout entier n.
   Bilan : pour tout entier n, on a : $u_n\in[-2;6[$ 2,5 pts

2. Etude du sens de variation de la suite :
   — **Méthode 1** : étude du signe de $u_{n+1}-u_n$

   $$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n&=\frac{6(n+1)-2}{n+2}-\frac{6n-2}{n+1}\\&=\frac{(6n+4)(n+1)-(n+2)(6n-2)}{(n+2)(n+1)}=\ldots=\frac{8}{(n+2)(n+1)}>0\end{aligned}$$

   Donc la suite (u_n) est croissante.

   — **Méthode 2** : étude des variations sur $I=[0;+\infty[$ de la fonction f telle que $u_n=f(n)$
   On a $f(x)=\dfrac{6x-2}{x+1}$

   $\forall x\in I, f'(x)=\dfrac{6(x+1)-(1)(6x-2))}{(x+1)^2}=\dfrac{8}{(x+1)^2}>0$

   f est croissante sur I, donc la suite (u_n) est croissante. 2 pts

Exercice 3 **4,5 pts**

- $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\dfrac{-3n^2+1}{2n^3+n^2+2}=\dfrac{n^2\left(-3+\frac{1}{n^2}\right)}{n^3\left(2+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^3}\right)}=\dfrac{1}{n}\times\dfrac{-3+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^3}}$

  Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-3+\dfrac{1}{n^2}\right)=-3$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2+\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^3}\right)=2$, et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)=0$

  d'où (par produit et quotient) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=0$ 1,5 pts

- $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ v_n=\dfrac{2n+\sqrt{n}}{1-3\sqrt{n}}=\dfrac{n\left(2+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-3\right)}=\sqrt{n}\times\dfrac{2+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}-3}$

  Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n}\right)=+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)=2$, et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-3\right)=-3$

d'où (par produit et quotient) $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = -\infty$ 1,5 pts

- $\forall n \in \mathbb{N},\ -1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$

d'où, pour tout entier n : $w_n \leqslant 1 - 2024n$
Or $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-2024n) = -\infty$

d'où (par comparaison) $\lim\limits_{n\to+\infty}(w_n) = -\infty$ 1,5 pts

EXERCICE 4 3,5 pts

1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : 2 pts
$$-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$$
d'où : $2 \geqslant -2\cos(n) \geqslant -2$
$$-2 \leqslant -2\cos(n) \leqslant 2$$
$$5 \leqslant 7-2\cos(n) \leqslant 9$$
$$\frac{1}{5} \geqslant \frac{1}{7-2\cos(n)} \geqslant \frac{1}{9} \quad \text{(fonction inverse décroissante sur }]0;+\infty[\text{)}$$
$$\frac{3n-2}{5} \geqslant \frac{3n-2}{7-2\cos(n)} \geqslant \frac{3n-2}{9} \quad (\text{ car } 3n-2>0 \quad \text{pour } n \geqslant 1)$$
Donc on a bien, pour tout $n \geqslant 1$: $u_n \geqslant \dfrac{3n-2}{9}$

2. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3n-2}{9}\right) = +\infty$
on en déduit par comparaison que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = +\infty$ et donc que cette suite n'est pas majorée. 1,5 pts

EXERCICE 5 3,5 pts

Soit $P(n)$ la proposition : $t_n = \dfrac{n}{n+1}$

- $P(0)$ est vraie car on a bien : $\dfrac{0}{0+1} = 0 = t_0$

- Supposons que $t_n = \dfrac{n}{n+1}$ pour **un** entier n donné quelconque.

d'où : $t_{n+1} = t_n + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{n}{n+1} + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

d'où : $t_{n+1} = \dfrac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}$

d'où : $t_{n+1} = \dfrac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}$

d'où : $t_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{n+1}{n+2}$

Ainsi on a montré que : $P(n)$ vraie $\Rightarrow P(n+1)$ vraie

- Bilan : on a montré par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad t_n = \dfrac{n}{n+1}$

EXERCICE 6 9 pts

Partie A

1. Prendre les 85 % du nombre de collaborateurs en télétravail revient à multiplier par 0,85; puis on ajoute 450 donc, pour tout entier naturel n, on a : $a_{n+1} = 0,85a_n + 450$. 0,75 pts
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = a_n - 3000$; on en déduit que $a_n = v_n + 3000$.
   (a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 3000 = 0,85u_n + 450 - 3000 = 0,85(v_n + 3000) - 2550$
   $= 0,85v_n + 2550 - 2550 = 0,85v_n$
   Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,85$. 2 pts
   (b) On en déduit que, pour tout n, on a $v_n = v_0 \times q^n = -2800 \times 0,85^n$.
   Or $u_n = v_n + 3000$ donc, pour tout entier naturel n, $a_n = -2800 \times 0,85^n + 3000$. 1 pts
3. $-1 < 0,85 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(0,85^n\right) = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 3000$

   Le nombre de collaborateurs en télétravail va se stabiliser vers 3000 au bout d'un grand nombre de mois. 0,5 pts

Partie B

1. f est une fonction rationnelle définie et dérivable sur $]-2\ ,\ +\infty[$. 1 pt
   $\forall x \leqslant 0,\ f'(x) = \dfrac{5\times(x+2)-(5x+4)\times 1}{(x+2)^2} = \dfrac{5x+10-5x-4)\times 1}{(x+2)^2} = \dfrac{6}{(x+2)^2}$
   $f'(x) > 0$ sur $[0\ ,\ +\infty[$, donc la fonction f est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. (a) Soit $\mathscr{P}$ la propriété $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

- **Initialisation**

  $u_0 = 1$ et $u_1 = \dfrac{5 \times u_0 + 4}{u_0 + 1} = \dfrac{5 \times 1 + 4}{1 + 2} = \dfrac{9}{3} = 3$

  $0 \leqslant 1 \leqslant 3 \leqslant 4$, soit $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 4$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

- **Hérédité**

  On suppose la propriété vraie au rang $n \geqslant 0$
  c'est-à-dire $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.
  La fonction f est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ donc sur $[0\ ;\ 4[$,
  donc de la relation $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$,
  on déduit $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(4)$.
  Or $f(0) = \dfrac{4}{2} = 2 \geqslant 0$; $f(u_n) = u_{n+1}$; $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(4) = \dfrac{24}{6} = 4$
  On a donc : $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4$

  On a donc montré que si la propriété est vraie à un rang n, alors elle est aussi vraie au rang $n + 1$.

- **Conclusion**

  La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$, donc, d'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout n, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$. 2 pts

(b) La suite (u_n) est croissante et bornée. 0,5 pts

3. On admet que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant 4 - u_n \leqslant 3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

La suite $\left(3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$ est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$; or $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$ donc la suite $\left(3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$ converge vers 0.

D'après le théorème des gendarmes, on déduit $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (4 - u_n) = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (u_n) = 4$. 1 pts

Cela signifie que le nombre de collaborateurs satisfaits va tendre vers 4 milliers sur les 5 000 que compte l'entreprise. 0.25 pts