Barème sur 25 points

EXERCICE 1 — 5 pts

Soit la fonction rationnelle f définie sur $D = \mathbb{R}$ par $f(x) = a + \dfrac{bx}{x^2+1}$ où a et b sont des réels.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

1. Déterminer a et b tels que la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point J de coordonnées $(0;1)$ et admette en ce point une tangente parallèle à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -3x+2$.
2. Vérifier que, pour tout réel x, on a : $f(x) = \dfrac{x^2-3x+1}{x^2+1}$
3. Déterminer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que J est le seul point de $\mathscr{C}_f$ en lequel la tangente est parallèle à la droite $\mathscr{D}$.

EXERCICE 2 — 3,5 pts

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \dfrac{6n-2}{n+1}$

1. Montrer que pour tout entier n, on a : $-2 \leqslant u_n < 6$.
2. Déterminer le sens de variation de la suite u.

EXERCICE 3 — 3,5 pts

Etudier la limite de chacune des suites suivantes, définies pour tout entier n :

$$u_n = \frac{-3n^2+1}{2n^3+n^2+2} \qquad v_n = \frac{2n+\sqrt{n}}{1-3\sqrt{n}} \qquad w_n = (-1)^n - 2024n$$

EXERCICE 4 — 2,5 pts

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par : $u_n = \dfrac{3n-2}{7-2\cos(n)}$

1. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $u_n \geqslant \dfrac{3n-2}{9}$
2. En déduire que cette suite n'est pas majorée.

EXERCICE 5 — 3 pts

On considère la suite (t_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $t_0 = 0$ et, pour tout entier n, $t_{n+1} = t_n + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

Montrer que $t_n = \dfrac{n}{n+1}$ pour tout entier n.

Tournez svp !

EXERCICE 6 **7,5 pts**

En mai 2020, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable. Elle propose alors à ses 5000 collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.

En mai 2020, seuls 200 d'entre eux ont choisi le télétravail.

Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de l'entreprise constatent que 85 % de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent choisissent de continuer, et que, chaque mois, 450 collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail.

On modélise le nombre de collaborateurs de cette entreprise en télétravail par la suite (a_n).

Le terme a_n désigne ainsi une estimation du nombre de collaborateurs en télétravail le n-ième mois après le mois de mai 2020. Ainsi $a_0 = 200$.

Partie A :

1. Justifier que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,85a_n + 450$.
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = a_n - 3000$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,85$.
   b. En déduire l'expression de a_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
3. Déterminer la limite de la suite (a_n).

Partie B :

Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur son personnel, les dirigeants de l'entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$$

où u_n désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de n mois après le mois de mai 2020.

1. Justifier que la fonction f définie pour tout $x \in]-2\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5x+4}{x+2}$ est strictement croissante sur $]-2\ ;\ +\infty[$.
2. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$
   b. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?
3. On admet que pour tout entier naturel n, on a : $0 \leqslant 4 - u_n \leqslant 3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

   En déduire que la suite (u_n) est convergente et interpréter sa limite dans le contexte de la modélisation.