Corrigé Archives DS 29 mars

Exercice 3

1. $$\begin{aligned} \mathrm{L}i'(t)+\mathrm{R}i(t)=\mathrm{U} &\iff 0,2i'(t)+100i(t)=10\\ &\iff i'(t)+500i(t)=50\\ &\iff i'(t)=-500i(t)+50\\ &\iff i \text{ est solution de } (\mathrm{E}) : y'=-500y+50\end{aligned}$$

2. Les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme :
$t\longmapsto Ce^{-500t}-\dfrac{50}{-500}=Ce^{-500t}+\dfrac{1}{10}$ avec $C\in\mathbb{R}$.

3. (a) $i(t)=Ce^{-500t}+\dfrac{1}{10}$
$i(0)=0 \iff Ce^0+\dfrac{1}{10}=0 \iff C=-\dfrac{1}{10}$.

   Ainsi on a : $i(t)=-\dfrac{1}{10}e^{-500t}+\dfrac{1}{10}=\dfrac{1}{10}\left(1-e^{-500t}\right)$

   (b) $$\left.\begin{array}{lcl}\lim\limits_{t\to+\infty}-500t&=&-\infty\\ \lim\limits_{T\to-\infty}\left(e^T\right)&=&0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{t\to+\infty}e^{-500t}=0 \quad\text{par composée.}$$

   D'où par somme et produit $\lim\limits_{t\to+\infty}i(t)=\dfrac{1}{10}$

   (c) $\forall t\in[0;+\infty[$, $i'(t)=\dfrac{1}{10}\left(-(-500)e^{-500t}\right)=50e^{-500t}$

   Donc $i'(t)>0$ sur $[0;+\infty[$. Ainsi i est strict. croissante sur $[0;+\infty[$.

   (d) $$\begin{aligned} i(t)\geqslant 0,095 &\iff \frac{1}{10}\left(1-e^{-500t}\right)\geqslant 0,095\\ &\iff 1-e^{-500t}\geqslant 0,95\\ &\iff e^{-500t}\leqslant 0,05\\ &\iff -500t\leqslant \ln 0,05 \quad \text{car } ln \text{ est croissante}\\ &\iff t\geqslant -\frac{\ln 0,05}{500}\end{aligned}$$

   $t_1=-\dfrac{\ln 0,05}{500}\approx 0,006$ s

4. Equation de T : $y=i'(0)(t-0)+i(0)$ donc $y=50t$

   L'asymptote à $\mathscr{C}$ est la droite d'équation $y=\dfrac{1}{10}$ car $\lim\limits_{t\to+\infty}i(t)=\dfrac{1}{10}$

   $50t=\dfrac{1}{10} \iff t=\dfrac{1}{500}=0,002$ donc I$(0,002;0,1)$

Exercice 4

1. Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur l'ensemble I donné :

   (a) $f(x)=(4x+3)e^{4x^2+6x}$
   On sait que $u'e^u$ a pour primitive e^u
   $f(x)=(4x+3)e^{4x^2+6x}=\dfrac{1}{2}(8x+6)e^{4x^2+6x}=\dfrac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$
   donc $F(x)=\dfrac{1}{2}e^{4x^2+6x}$

   (b) $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{1}{x}\times\ln x=u'(x)u(x)$ avec $u(x)=\ln x$
   D'où $G(x)=\dfrac{1}{2}u^2(x)=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$

   (c) $h(x)=\dfrac{2x}{7-3x^2}$
   On sait que $\dfrac{u'}{u}$ a pour primitive $\ln|u|$
   $h(x)=\dfrac{1}{-3}\times\dfrac{-6x}{7-3x^2}=\dfrac{-1}{3}\times\dfrac{u'(x)}{u(x)}$
   Donc $H(x)=\dfrac{-1}{3}\ln|7-3x^2|=\dfrac{-1}{3}\ln(7-3x^2)$ car $7-3x^2>0$ sur $[0;1]$.

2. Résoudre une équation différentielle de la forme $y'=f$ revient à déterminer toutes les primitives de la fonction f.

   (a) Soit $f(x)=\dfrac{6x}{\sqrt{x^2+3}}$
   On sait que $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ a pour primitive $2\sqrt{u}$
   $f(x)=\dfrac{6x}{\sqrt{x^2+3}}=3\times\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+3}}$

   Donc les solutions sur I de l'équation différentielles sont les fonctions de la forme :
   $x\longmapsto 6\sqrt{x^2+3}+C \quad (C\in\mathbb{R})$

   (b) Soit $g(x)=x(-4x^2+5)^4$
   On sait que $u'\,u^4$ a pour primitive $\dfrac{1}{5}u^5$
   $g(x)=x(-4x^2+5)^4=-\dfrac{1}{8}\times(-8x)(-4x^2+5)^4$

   Donc les solutions sur I de l'équation différentielles sont les fonctions de la forme :
   $x\longmapsto -\dfrac{1}{8}\times\dfrac{1}{5}(-4x^2+5)^5+C=-\dfrac{1}{40}(-4x^2+5)^5+C \quad (C\in\mathbb{R})$

(c) Soit $j(x) = \dfrac{x^3}{(x^4+1)^3} = x^3(x^4+1)^{-3}$

On sait que $\quad u'\,u^n$ a pour primitive $\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$ (pour $n \neq -1$)

donc $\quad u'\,u^{-3}$ a pour primitive $\dfrac{1}{-3+1}u^{-3+1} = \dfrac{-1}{2}u^{-2}$

Or $j(x) = x^3(x^4+1)^{-3} = \dfrac{1}{4} \times (4x^3)(x^4+1)^{-3}$

Donc les solutions sur I de l'équation différentielles sont les fonctions de la forme :

$x \longmapsto \dfrac{1}{4} \times \dfrac{-1}{2}(x^4+1)^{-2} + C = \dfrac{-1}{8(x^4+1)^2} + C \quad (C \in \mathbb{R})$

(d) Soit $h(x) = \dfrac{1}{x\ln x} = \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x}$

On sait que $\quad \dfrac{u'}{u}$ a pour primitive $\ln|u|$

Donc les solutions sur I de l'équation différentielles sont les fonctions de la forme :

$x \longmapsto \ln|\ln x| + C = \ln(\ln x) + C \quad (C \in \mathbb{R}) \qquad$ (car $\ln x \geqslant 0$ sur $[1;+\infty[$)

3. Soit Φ définie sur $I =]2;+\infty[$ par $\Phi(x) = \dfrac{x+13}{(x+3)(2-x)}$.

(a) $\forall x \in I,\ \dfrac{a}{x+3} + \dfrac{b}{2-x} = \dfrac{a(2-x)}{(x+3)(2-x)} + \dfrac{b(x+3)}{(2-x)(x+3)} = \dfrac{(b-a)x+2a+3b}{(2-x)(x+3)}$.

D'où par identification avec $\Phi(x) = \dfrac{x+13}{(x+3)(2-x)}$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} b-a & = & 1 \\ 2a+3b & = & 13 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} b & = & 1+a \\ 2a+3(1+a) & = & 13 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} b & = & 1+a \\ 5a & = & 10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a & = & 2 \\ b & = & 3 \end{array}\right.$$

Donc, pour tout x de I : $\quad \Phi(x) = \dfrac{2}{x+3} + \dfrac{3}{2-x} = 2 \times \dfrac{1}{x+3} - 3 \times \dfrac{-1}{2-x}$

(b) Les primitives de la fonction Φ sur $I =]2;+\infty[$ sont donc les fonctions de la forme :

$x \longmapsto 2\ln|x+3| - 3\ln|2-x| + C = 2\ln(x+3) - 3\ln(x-2) + C \quad (C \in \mathbb{R})$