EXERCICE 2 **Corrigés Archives dérivation-convexité (page 1)**

Soit f la fonction définie sur c par $f(x) = (3 - x)(e^x + 3)$.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = (-1)(e^x + 3) + (3 - x)(e^x) = 2e^x - xe^x - 3$$

2. f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = 2e^x - \left(e^x + xe^x\right) = e^x(1 - x)$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
signe de e^x		+	0	+	
signe de $1 - x$		+	0	−	
signe de $f''(x)$		+	0	−	
$f'(x)$		↗	$e - 3$	↘	

$f'(1) = e - 3 < 0$.

Donc $f'(x)$ est négatif sur $\mathbb{R}$. (car le maximum de f' est négatif)

3.

x	$-\infty$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		−	
$f(x)$		↘	

4. On résout $f'(x) = -3$.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -3 &\iff 2e^x - xe^x - 3 = -3\\ &\iff 2e^x - xe^x = 0\\ &\iff (2 - x)e^x = 0\\ &\iff 2 - x = 0 \quad \text{car } e^x \neq 0 \text{ sur } \mathbb{R}\\ &\iff x = 2\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{C}_f$ admet une tangente parallèle à la droite D d'équation $y = 2 - 3x$ au point A d'abscisse 2.

Ex I

① a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3 \times 2(2x+1)^2 e^{-x^2} + (2x+1)^3(-2x)e^{-x^2}$$
$$= (2x+1)^2 e^{-x^2}\left[6 + (2x+1)(-2x)\right]$$
$$= (-4x^2 - 2x + 6)(2x+1)^2 e^{-x^2}$$
$$= -2(2x^2 + x - 3)(2x+1)^2 e^{-x^2}$$

b) tableau de signe de $f'(x)$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$(2x+1)^2$		+		+	0	+		+	
e^{-x^2}		+		+		+		+	
-2		−		−		−		−	
$2x^2 + x - 3$		+	0	−		−	0	+	
$f''(x)$		−	0	+	0	+	0	−	

donc f est convexe sur $\left[-\frac{3}{2} ;\right.$ [illegible]

f est concave sur $\left]-\infty ; -\frac{3}{2}\right]$ et sur $[1 ; +\infty[$

Sa courbe admet deux points d'inflexion d'abscisses $-\frac{3}{2}$ et 1

(car $f''(x)$ s'annule en changeant de signe)

② a) VRAI f est concave sur $[-2 ; -1]$

b) $F' = f$ et $f(x) > 0$ sur $[-1 ; 1]$ → FAUX

donc F est croissante sur $[-1 ; 1]$

c) $F'' = f'$ $f' < 0$ sur $(1 ; 2]$ donc → FAUX

d)

x	-2		1		2,8		3
$F' = f$		+	0	−	0	+	
		↗	0	↘		↗	

$F(2{,}8) < 0$

car $F(1) = 0$

Exercice 5

Soit k un réel strictement positif. On considère les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - k\mathrm{e}^{-x}$.

1. $\forall x \in \mathbb{R}$: $\quad f_k'(x) = x + k\mathrm{e}^{-x} \quad$ et $\quad f_k''(x) = 1 - k\mathrm{e}^{-x}$

   $f_k''(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - k\mathrm{e}^{-x} > 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x} < \dfrac{1}{k} \Leftrightarrow -x < \ln\left(\dfrac{1}{k}\right) \Leftrightarrow -x < -\ln(k) \Leftrightarrow x > \ln(k)$

   Donc $f_k''(x)$ s'annule en changeant de signe en $x_k = \ln k$
   Ainsi, pour tout réel k strictement positif, la courbe $\mathscr{C}_k$ admet un point d'inflexion A_k d'abscisse $x_k = \ln k$

2. Pour tout réel k strictement positif :
   $f_k(x_k) = \dfrac{1}{2}(\ln k)^2 - k\mathrm{e}^{-\ln k} = \dfrac{1}{2}(\ln k)^2 - \dfrac{k}{\mathrm{e}^{\ln k}} = \dfrac{1}{2}(\ln k)^2 - \dfrac{k}{k} = \dfrac{1}{2}x_k^2 - 1.$

   Donc il est vrai que, pour tout réel k strictement positif, les points A_k appartiennent à la parabole d'équation $y = \dfrac{1}{2}x^2 - 1$.

Exercice 4 - Partie A

2. [1 point]
Sur $\mathbb{R}_+$, g est dérivable et $g(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$ donc

$$g'(x) = \mathrm{e}^{-x}$$

Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $g'(x) > 0$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.
La fonction g est donc strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
g	$0 \nearrow 1$

3. [1 point]
Sur $\mathbb{R}_+$, g' est dérivable et

$$g''(x) = -\mathrm{e}^{-x}$$

Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $g''(x) < 0$ sur $[0\ ;\ +\infty[$. La fonction g est donc concave sur $\mathbb{R}_+$.

Partie B

1.

1. a. [1.5 point]

$$f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{-kx} + 1.$$

$u(x) = x - 1 \qquad v(x) = \mathrm{e}^{-kx}$

$u'(x) = 1 \qquad v'(x) = -k\mathrm{e}^{-kx}$

$$f = uv + 1 \text{ et } (uv)' = u'v + uv'$$

Pour tout réel x de $\mathbb{R}_+$ on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \mathrm{e}^{-kx} + (x-1) \times (-k\mathrm{e}^{-kx}) + 0 \\ &= \mathrm{e}^{-kx}\,(1 + (x-1)(-k)) \\ &= \mathrm{e}^{-kx}(1 - kx + k) \\ f'(x) &= \underline{\mathrm{e}^{-kx}(-kx + k + 1)} \end{aligned}$$

1. b. [1.5 point]
La tangente T a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.
or $f(1) = 1$ et $f'(1) = \mathrm{e}^{-k}$
Donc T a pour équation

$$y = \mathrm{e}^{-k}(x-1) + 1 = \mathrm{e}^{-k}x - \mathrm{e}^{-k} + 1$$

B est le point de T d'abscisse 0, donc

$$y_B = -\mathrm{e}^{-k} + 1 = g(k)$$

2. [1 point]
D'après le tableau de variation de la fonction g de la partie A, pour tout réel positif k, $g(k) \in [0\ ;\ 1]$.
Le point B ayant pour coordonnées $(0\ ;\ g(k))$ avec $0 \leqslant g(k) \leqslant 1$, il appartient bien au segment $[OJ]$.

Exercice VII

1. La fonction dont la courbe représentative est la courbe $\mathscr{C}_2$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$, si c'était la dérivée d'une fonction, cette fonction serait strictement croissante or aucune des deux autres fonctions n'est strictement croissante. Cette fonction ne peut pas être la dérivée d'une des deux autres, c'est donc la fonction f.

   f étant strictement croissante, sa dérivée est une fonction strictement positive sur $\mathbb{R}$, sa dérivée est donc la fonction dont la courbe représentative est la courbe $\mathscr{C}_3$

   Et par élimination, $\mathscr{C}_1$ est la courbe représentative de la fonction f'' (On vérifie que f' est croissante sur $]-\infty\,;\,4]$ et décroissante sur $[4\,;\,+\infty[$ ce qui coïncide avec le signe de $f''(x)$ qui est positive sur $]-\infty\,;\,4]$ et négative sur $[4\,;\,+\infty[$.

   $\mathscr{C}_1$ est la courbe représentative de la fonction f''.

   $\mathscr{C}_2$ est la courbe représentative de la fonction f.

   $\mathscr{C}_3$ est la courbe représentative de la fonction f'.

EXERCICE 1

a) $f(x) = -x + 1 + e^{3x+4}$

$\boxed{f'(x) = -1 + 3e^{3x+4}}$

Rappel : En posant $u(x) = 3x+4$, $u'(x) = 3$ et $(e^u)'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

b) $g(x) = 2x^3 + 3x + 1$

$g'(x) = 2 \times 3x^2 + 3$

$\boxed{g'(x) = 6x^2 + 3}$

$h(x) = (2x^3+3x+1)^4 = (g(x))^4$

$h'(x) = 4g'(x)(g(x))^3$

$\boxed{h'(x) = 4(6x^2+3)(2x^3+3x+1)^3}$

c) $i(x) = \dfrac{e^x}{x} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec : $\begin{cases} u(x) = e^x \\ u'(x) = e^x \end{cases}$ et $\begin{cases} v(x) = x \\ v'(x) = 1 \end{cases}$.

$\boxed{i'(x)} = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \dfrac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \boxed{\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}}$

d) $j(x) = \dfrac{1}{1+e^{-2x}} = \dfrac{1}{v(x)}$ avec : $\begin{cases} v(x) = 1 + e^{-2x} \\ v'(x) = 0 + (-2)e^{-2x} = -2e^{-2x} \end{cases}$

$\boxed{j'(x)} = \dfrac{-v'(x)}{v^2(x)} = \boxed{\dfrac{2e^{-2x}}{(1+e^{-2x})^2}}$

e) $k(x) = \sqrt{x^4 + 3e^{-x^2}} = \sqrt{u(x)}$ où $\begin{cases} u(x) = x^4 + 3e^{-x^2} \\ u'(x) = 4x^3 + 3\times(-2x)e^{-x^2} = 4x^3 - 6xe^{-x^2} \end{cases}$

$k'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \dfrac{4x^3 - 6xe^{-x^2}}{2\sqrt{x^4+3e^{-x^2}}}$

$\boxed{k'(x)} = \dfrac{2x(2x^2 - 3e^{-x^2})}{2\sqrt{x^4+3e^{-x^2}}} = \boxed{\dfrac{x(2x^2 - 3e^{-x^2})}{\sqrt{x^4+3e^{-x^2}}}}$