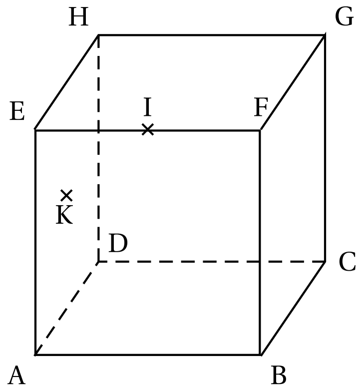
EXERCICE 1

ABCDEFGH est un cube d'arête 1. I est le milieu de [EF] et K est le centre de la face ADHE.



Répondre aux questions suivantes sans utiliser de repère !

1. **a.** Justifier que le triangle AIG est isocèle.
   b. Montrer que $\overrightarrow{IG} \cdot \overrightarrow{IA} = -\frac{1}{4}$
   c. En déduire une valeur arrondie à 0,1 degré de l'angle $\widehat{AIG}$
2. **a.** En écrivant $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}$, calculer $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AG}$
   b. Calculer de même $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AI}$
   c. Quelle droite est la hauteur issue de B dans le tétraèdre BAGI ? Justifier votre réponse.

EXERCICE 2

ABCDEFGH est un cube. M et N sont les points définis par $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{GN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{GE} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BG}$

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}\right)$

1. Donner sans justifier les coordonnées du point M.
2. Déterminer les coordonnées du point N.
3. Vérifier que $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BE}$.
4. Montrer que la droite (MN) est la perpendiculaire commune aux droites (EB) et (AC).

EXERCICE 3

Soit A, B, C et D quatre points quelconques de l'espace.

Démontrer que : $AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 = 2\,\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$

EXERCICE 4

Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln x}{x - \ln x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$

Montrez que f est continue en zéro.

Tournez svp !

EXERCICE 5

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $u(x) = \ln(x) + x - 3$.

1. Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
2. Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.
3. En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x\ln(x) - \ln(x) + 2}{x}$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que $f(\alpha) = 4 - \dfrac{\alpha^2 + 1}{\alpha}$
3. **a.** Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{u(x)}{x^2}$ où u est la fonction définie dans la partie A.

   b. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie C

Soit $\mathscr{C}'$ la courbe d'équation $y = \ln(x)$.

1. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $f(x) - \ln(x) = \dfrac{2 - \ln(x)}{x}$.
2. En déduire que les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées.
3. Etudier la position relative de ces deux courbes.

EXERCICE 6

Soit n un entier strictement positif.
Soit la fonction f_n définie sur l'ensemble des nombres réels par $f_n(x) = 2n\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x}$.
Soit $\mathscr{C}_n$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

« $\mathscr{C}_n$ admet une tangente horizontale en un unique point S_n de coordonnées $(\ln n\ ;\ n^2)$ »

EXERCICE 7

Soit une fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = (ax + b)\ln x \qquad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont deux paramètres réels.}$$

Soit $\mathscr{C}$ la courbe de f dans un repère du plan.

Déterminer la valeur des réels a et b sachant que :
— $\mathscr{C}$ passe par le point $\mathrm{A}(3;0)$.
— la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 2.