Corrigé Archives prépa DS 4

Exercice 1 .... 6 pts

1. (a) $AI^2 = AE^2 + EI^2$ (Théo de Pythagore).
$= 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$
De même on a : $GI^2 = GF^2 + FI^2$.
$= 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$
Donc le triangle AIG est isocèle en I. 1 pt

(b) $\overrightarrow{IG}\cdot\overrightarrow{IA} = \left(\overrightarrow{IF}+\overrightarrow{FG}\right)\cdot\overrightarrow{IA}$
$= \overrightarrow{IF}\cdot\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{IA}$
Or $\overrightarrow{IF}\cdot\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IF}\cdot\overrightarrow{IE}$ (car $\overrightarrow{IE}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{IA}$ sur $\overrightarrow{IF}$).
$= -\overrightarrow{IF}^2 = -\frac{1}{4}$.
Et $\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{IA} = 0$ car $(FG)\perp(ABF)$ et $(IA)\subset(ABF)$ donc $(FG)\perp(IA)$)

Donc $\overrightarrow{IG}\cdot\overrightarrow{IA} = -\frac{1}{4}$ 1,25 pts

(c) $\overrightarrow{IG}\cdot\overrightarrow{IA} = IG \times IA \times \cos\left(\widehat{AIG}\right)$

D'où $\cos\left(\widehat{AIG}\right) = \dfrac{\overrightarrow{IG}\cdot\overrightarrow{IA}}{IG\times IA} = \dfrac{-\frac{1}{4}}{\frac{5}{4}} = -\frac{1}{5}$

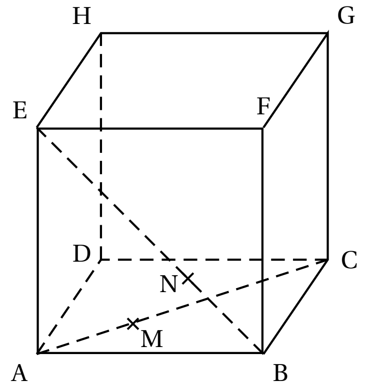
Donc $\widehat{AIG} = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{5}\right) \approx 101,5°$ 1 pt

2. (a) $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AG} = \left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}\right)$
$= \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{BG}$
$= -1 + 0 + 0 + \frac{1}{2}\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{BG}$
$= \frac{1}{2}BG^2 - 1$
$= \frac{1}{2}\times(\sqrt{2}^2) - 1 = 0$ 1,25 pts

(b) $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AI} = \left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EI}\right)$
$= \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{EI} + \overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{EI}$
$= 0 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 0$ 1 pt

(c) (BK) est donc orthogonale à (AG) et (AI), droites non parallèles du plan (AIG). Donc (BK) est la hauteur issue de B dans le tétraèdre BAGI. 0,5 pt

Exercice 2 .... 3,5 pts



L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$

1. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $C(1;1;0)$ donc $M\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};0\right)$ 0,5 pt

2. Soit $N(x;y;z)$.

$$\overrightarrow{GN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{GE} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BG} \iff \begin{cases} x-1 = \frac{1}{3}(0-1) - \frac{2}{3}(1-1) \\ y-1 = \frac{1}{3}(0-1) - \frac{2}{3}(1-0) \\ z-1 = \frac{1}{3}(1-1) - \frac{2}{3}(1-0) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x-1 = -\frac{1}{3} \\ y-1 = -1 \\ z-1 = -\frac{2}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = 0 \\ z = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Donc $N\left(\frac{2}{3};0;\frac{1}{3}\right)$ 1,5 pts

3. $$\overrightarrow{BN}\begin{pmatrix} \frac{2}{3}-1 \\ 0-0 \\ \frac{1}{3}-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} 0-1 \\ 0-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc on a bien $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BE}$. 0,5 pt

4. $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{EB}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{EB}=\frac{1}{3}+0-\frac{1}{3}=0$ donc (MN) $\perp$ (EB)

$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+0=0$ donc (MN) $\perp$ (AC)

Donc on a :

- M $\in$ (AC)
- N $\in$ (EB)
- (MN) $\perp$ (EB)
- (MN) $\perp$ (AC)

Donc (MN) est bien la perpendiculaire commune aux droites (EB) et (AC). 1 pt

EXERCICE 3 .... 2 pts

$$\begin{aligned}AB^2-BC^2+CD^2-DA^2 &= (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})\ +\ (\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})\cdot(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA})\\ &=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})\ +\ \overrightarrow{CA}\cdot(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA})\\ &=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})\ -\ \overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA})\\ &=\overrightarrow{AC}\cdot\left[\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}\right]\\ &=\overrightarrow{AC}\cdot\left[\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}\right]\\ &=\overrightarrow{AC}\cdot\left[2\overrightarrow{DB}\right]\\ &=2\,\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}\end{aligned}$$

EXERCICE 4 .... 2 pts

Pour tout $x>0$, on a : $\quad f(x)=\dfrac{\ln x}{x-\ln x}=\dfrac{\ln x}{\ln x\left(\frac{x}{\ln x}-1\right)}=\dfrac{1}{\frac{x}{\ln x}-1}$

Or $\lim\limits_{x\to0}x=0$ et $\lim\limits_{x\to0}\ln x=-\infty$

D'où par quotient $\quad\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\ln x}=0$

D'où $\quad\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x}{\ln x}-1\right)=-1$

D'où par inverse $\quad\lim\limits_{x\to0}f(x)=-1=f(0)$

Donc f est bien continue en zéro.

EXERCICE 5 .... 12 pts

Partie A

1. La fonction est la somme des fonctions $x\mapsto\ln(x)$ et $x\mapsto x-3$, toutes deux strictement croissantes sur D=]0 ; $+\infty$[, elle est donc strictement croissante sur cet intervalle. 0,75 pt

> On pouvait également dériver la fonction u et constater que la dérivée est strictement positive sur l'intervalle considéré.

2.
   - u est continue sur D comme somme de fonctions continues.
   - u est strictement croissante sur D.
   - $u(2)=\ln(2)-1$ or $\ln(2)<\ln(\mathrm{e})=1$ car $\mathrm{e}>2$. On prouve ainsi que $u(2)<0$.
     $u(3)=\ln(3)$ or $\ln(3)>\ln(1)=0$ car $3>1$, ce qui montre que $u(3)>0$.
     Donc l'intervalle image de [2;3] par u contient 0. (***)
   - Conclusion : d'après le théorème de la bijection, on en déduit que 0 possède ainsi un antécédent par u dans l'intervalle [2 ; 3]. Comme u est strictement monotone sur]0 ; $+\infty$[, cet antécédent α est unique sur]0 ; $+\infty$[. 2 pts

> (***) on pouvait également expliquer que l'on constate à la calculatrice que $u(2)<0$ et $u(3)>0$. Mais argument moins rigoureux...

3. Compte-tenu du sens de variation de u, on a : 0,5 pt

x	0		α		$+\infty$
$u(x)$	‖	-	0	+	

Partie B

$f(x)=\dfrac{x\ln(x)-\ln(x)+2}{x}$

1.
   - $\lim\limits_{x\to0}x\ln x=0\quad$ (croissance comparée)

     $\lim\limits_{x\to0}\ln x=-\infty\Longrightarrow\lim\limits_{x\to0}(-\ln x+2)=+\infty$

     D'où par somme : $\lim\limits_{x\to0}(x\ln x-\ln x+2)=+\infty$

     Par ailleurs : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x=0^+\quad$ d'où par quotient : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=+\infty$ 1 pt
   - $f(x)=\ln x-\dfrac{\ln(x)}{x}+\dfrac{2}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ (croissance comparée) et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ d'où par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ 1 pt

2. $u(\alpha) = 0 \iff \ln\alpha = 3 - \alpha$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha(3-\alpha) - (3-\alpha) + 2}{\alpha} = \dots = \frac{4\alpha - \alpha^2 - 1}{\alpha} = 4 - \frac{\alpha^2+1}{\alpha}$$ 1,25 pts

3. (a) f est dérivable sur $]0;\ +\infty[$ comme sommes et produits de fonctions dérivables sur $]0;\ +\infty[$.

$$\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{(1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - \frac{1}{x})(x) - (1)(x\ln x - \ln x + 2)}{x^2}.$$
$$= \frac{x\ln x + x - 1 - x\ln x + \ln x - 2}{x^2}.$$
$$= \frac{1}{x^2}(\ln(x) + x - 3) = \frac{u(x)}{x^2}$$ 2 pt

(b)

x	0		α		$+\infty$
$u(x)$	||	$-$	0	$+$	
x^2	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

1 pt

Partie C

1. $$f(x) - \ln(x) = \frac{x\ln(x) - \ln(x) + 2}{x} - \ln(x)$$
$$= \frac{x\ln(x) - \ln(x) + 2 - x\ln x}{x}$$
$$= \frac{2 - \ln(x)}{x}$$ 0,5 pt

2. $2 - \ln(x) = 0 \iff x = \mathrm{e}^2$.
Les deux courbes se coupent donc en un unique point d'abscisse $x = \mathrm{e}^2$ et d'ordonnée $y = \ln\left(\mathrm{e}^2\right) = 2$. 1 pt

3. On étudie le signe de $f(x) - \ln(x) = 2 - \ln(x)$
$2 - \ln(x) > 0 \iff \ln x < 2 \iff x < \mathrm{e}^2$
Donc $\mathscr{C}$ est au-dessus de $\mathscr{C}'$ sur $]0;\mathrm{e}^2[$ et au-dessous de $\mathscr{C}'$ sur $]\mathrm{e}^2;+\infty[$ 1 pt

EXERCICE 6 .... 2 pts

« $\mathscr{C}_n$ admet une tangente horizontale » $\iff$ nombre dérivé nul. 0,5 pt

$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n'(x) = 2n\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{2x} = 2\mathrm{e}^x(n - \mathrm{e}^x)$. 0,5 pt

$$f_n'(x) = 0 \iff n - \mathrm{e}^x = 0 \quad (\text{car } 2\mathrm{e}^x \neq 0 \text{ sur } \mathbb{R})$$
$$\iff x = \ln n$$ 0,5 pt

$\mathscr{C}_n$ admet donc une tangente horizontale en un unique point S_n d'abscisse $x = \ln n$.

Son ordonnée est $y = f_n(\ln n) = 2n\mathrm{e}^{\ln n} - \mathrm{e}^{2\ln n} = 2n^2 - \mathrm{e}^{\ln n^2} = 2n^2 - n^2 = n^2$ 0,5 pt

Donc la proposition est vraie.

EXERCICE 7 .... 2,5 pts

— $A(3;0) \in \mathscr{C} \iff f(3) = 0 \iff (3a+b)\ln 3 = 0 \iff 3a + b = 0 \iff b = -3a$

— Soit B le pont de $\mathscr{C}$ d'abscisse 1 ; B(1;0).
La tangente à $\mathscr{C}$ en B(1;0) passe par le point de coord. C(0;2), donc son coefficient directeur est égale à $\dfrac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = -2$.
Ainsi $f'(1) = -2$.

Or f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f'(x) = a\ln x + (ax+b) \times \dfrac{1}{x}$

Donc $f'(1) = -2 \iff a + b = -2$

$$\begin{cases} 3a+b &= 0\\ a+b &= -2 \end{cases} \iff \begin{cases} b &= -3a\\ -2a- &= -2 \end{cases} \iff \begin{cases} b &= -3\\ a- &= 1 \end{cases}$$