Corrigé DS n° 2

Exercice 1

1. • $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ (limite **à l'infini** d'une **fonction rationnelle**) 1 pts

   • tableau de signe de x^2-x-2 :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

   • $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} (x^2-x-2) &=& 0^- \\ \lim\limits_{x\to2} (x^3+2x^2-8x-6) &=& -6 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x) = +\infty$ 1 pts

   $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} (x^2-x-2) &=& 0^+ \\ \lim\limits_{x\to2} (x^3+2x^2-8x-6) &=& -6 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x) = -\infty$ 1 pts

   • $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} (x^2-x-2) &=& 0^- \\ \lim\limits_{x\to-1} (x^3+2x^2-8x-6) &=& 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = -\infty$ 1 pts

2. $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x=2$ est asymptote à $(\mathscr{C})$

   $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x=-1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ 1 pts

3. (a) $\forall x \in D,\ f(x)-(x+3) = \dfrac{x^3+2x^2-8x-6}{x^2-x-2} - (x+3)$

   $$= \dfrac{(x^3+2x^2-8x-6)-(x^2-x-2)(x+3)}{x^2-x-2}$$

   $$= \dots = \dfrac{-3x}{x^2-x-2}$$ 1,5 pts

   (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{-3x}{x^2-x-2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{-3x}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{-3}{x}\right) = 0$ 1 pts

   (c) On en déduit que la droite Δ d'équation $y = x+3$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$ 0,5 pts

4. Pour étudier la position relative de $(\mathscr{C})$ et (Δ), il suffit d'étudier le signe de $f(x)-(x+3)$.

   $\forall x \in D,\ f(x)-(x+3) = \dfrac{-3x}{x^2-x-2}$

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$-3x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
x^2-x-2		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-(x+3)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

   Donc $(\mathscr{C})$ est au-dessus de $(\mathscr{D})$ sur $]0;2[$ et au-dessous sur $]-1;0[\ \cup\ ]2;+\infty[$ 1,5 pts

Exercice 2

$\forall x \in D,\ f(x) = \dfrac{3e^x+2}{1-e^x} = \dfrac{e^x(3+2e^{-x})}{e^x(e^{-x}-1)} = \dfrac{3+2e^{-x}}{e^{-x}-1}$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$

D'où $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to+\infty} \left(3+2e^{-x}\right) &=& 3 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^{-x}-1\right) &=& -1 \end{array}\right\} \Rightarrow_{\text{(par quotient)}} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -3$

Donc la droite d'équation $y=-3$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$ 1,5 pts

$\forall x \in D,\ f(x) = \dfrac{3e^x+2}{1-e^x}$

$\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to0} \left(3e^x+2\right) &=& 5 \\ \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \left(1-e^x\right) &=& 0^- \end{array}\right\} \Rightarrow_{\text{(par quotient)}} \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = -\infty$

Donc la droite d'équation $x=0$ est asymptote à $(\mathscr{C})$. 1,5 pts

Exercice 3

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1$
   d'où : $\quad -4 \leqslant \cos x - 3 \leqslant -2$
   d'où : $\quad -\dfrac{1}{4} \geqslant \dfrac{1}{\cos x + 3} \geqslant -\dfrac{1}{2}$ (fonction inverse décroissante sur $]-\infty ; 0[$)
   d'où : $\quad \dfrac{3x^2}{4} \leqslant \dfrac{-3x^2}{\cos x + 3} \leqslant \dfrac{3x^2}{2}$ (on a multiplié par $-3x^2$ qui est négatif)

   Or $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x^2}{4}\right) = +\infty$ d'où par comparaison : $\displaystyle\lim_{+\infty} f = +\infty$ $\boxed{\text{2 pts}}$

2. $g(x) = \dfrac{x\mathrm{e}^x}{1 - x^2}$. $\boxed{\text{2 pts}}$

   $$\left.\begin{array}{lcl} \displaystyle\lim_{x \to -\infty} \left(x\mathrm{e}^x\right) & = & 0 \quad \text{(croissance comparée)} \\ \displaystyle\lim_{x \to -\infty} \left(1 - x^2\right) & = & -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ par quotient } \lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$$

3. $h(x) = x - \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\left(\dfrac{x}{\mathrm{e}^x} - 1\right)$ $\boxed{\text{1 pt}}$

   $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{\mathrm{e}^x}\right) = 0$ (croissance comparée)

   $$\left.\begin{array}{lcl} \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\mathrm{e}^x\right) & = & +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{\mathrm{e}^x} - 1\right) & = & -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ par produit } \lim_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$$

Exercice 4

1. figure $\boxed{\text{0,5 pt}}$
2. $$\begin{aligned} \overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GJ} \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} + \frac{2}{3}\overrightarrow{GC} \\ &= \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CF}\right) + \overrightarrow{FG} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FC}\right) \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{EC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FG} - \frac{2}{3}\overrightarrow{FG} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FC} \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{EC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{FG} \qquad \text{car } \frac{2}{3}\overrightarrow{CF} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{0} \end{aligned}$$ $\boxed{\text{2,5 pts}}$

3. $\overrightarrow{IJ}$ s'exprime donc comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{FG}$.
   On en déduit que ces trois vecteurs sont coplanaires. $\boxed{\text{1 pt}}$

Exercice 5

On construit les points suivants :

- $Z = (IJ) \cap (FG)$
- $W = (IJ) \cap (CG)$
- $L = (ZK) \cap (FE)$
- $M = (ZK) \cap (GH)$
- $N = (MW) \cap (CD)$

La section du cube par le plan (IJK) est le pentagone $[IJLMN]$

N.B. Barème sur 23,5 pts :

Cela revient à mettre la section (ex 5) et la dernière question de ex 1 hors barème)