Corrigé DS n° 1

Exercice 1

- $u_n = \dfrac{\sqrt{n}-n}{1-3n} = \dfrac{n\left(\dfrac{\sqrt{n}}{n}-1\right)}{n\left(\dfrac{1}{n}-3\right)} = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{n}}-1}{\dfrac{1}{n}-3}$ pour tout $n \neq 0$

  Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}-3\right) = -3$, et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-1\right) = -1$

  d'où (par quotient) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = \dfrac{1}{3}$

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$ d'où $-2 \leqslant 3+5\sin n \leqslant 8$
  d'où $\dfrac{-2}{n+1} \leqslant v_n \leqslant \dfrac{8}{n+1}$

  Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-2}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{8}{n+1} = 0$

  Donc d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = 0$

Exercice 2

1. Etude du sens de variation de la suite :

   — **<u>Méthode 1</u>** : étude du signe de $u_{n+1}-u_n$

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n = \frac{4(n+1)-1}{n+2} - \frac{4n-1}{n+1} = \frac{(4n+3)(n+1)-(n+2)(4n-1)}{(n+2)(n+1)} = \ldots = \frac{5}{(n+2)(n+1)} > 0$$

   Donc la suite (u_n) est croissante.

   — **<u>Méthode 2</u>** : étude des variations sur $I = [0;+\infty[$ de la fonction f telle que $u_n = f(n)$

   On a $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+1}$

   $$\forall x \in I, f'(x) = \frac{4(x+1)-(1)(4x-1))}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2} > 0$$

   f est croissante sur I, donc la suite (u_n) est croissante.

2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n - 4 = \dfrac{4n-1}{n+1} - 4 = \dfrac{-5}{n+1} < 0$
   Donc on a bien $u_n < 4$ pour tout entier n.

   $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n - (-1) = \dfrac{4n-1}{n+1} + 1 = \dfrac{5n}{n+1} \geqslant 0$
   Donc on a bien $u_n \geqslant -1$ pour tout entier n.
   <u>Bilan</u> : pour tout entier n, on a : $u_n \in [-1;4[$

Exercice 3

On peut prendre par exemple :

$u_n = n^2$ et $v_n = \dfrac{-1}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a bien :

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = 0$

De plus, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \times v_n = -n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)\times(v_n) = -\infty$

Exercice 4 $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{4}{3}$ et $u_0 = 5$.

1. $u_1 = \dfrac{1}{3}u_0 + \dfrac{4}{3} = 3$ et $u_2 = \dfrac{1}{3}u_1 + \dfrac{4}{3} = \dfrac{7}{3}$

   $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{3}{5}$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{7}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{9}$

   $\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$ donc (u_n) n'est pas géométrique.

2.

Voir graphique en annexe

il semble que la suite (u_n) soit décroissante et minorée par 2.

3. Soit $P(n)$ la proposition : $u_n \geqslant 2$

- $P(0)$ est vraie car : $u_0 = 5 \geqslant 2$
- Supposons que $u_n \geqslant 2$ pour **un** entier n donné quelconque.

  d'où : $\dfrac{1}{3}u_n \geqslant \dfrac{2}{3}$

  d'où : $\dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{4}{3} \geqslant \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{3}$

  donc : $u_{n+1} \geqslant 2$

  Ainsi on a montré que : $P(n)$ vraie $\Rightarrow P(n+1)$ vraie

- Bilan : on en déduit par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant 2$

4. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{4}{3} - u_n = \dfrac{4}{3} - \dfrac{2}{3}u_n$

   Or, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 2$ donc $\dfrac{2}{3}u_n \geqslant \dfrac{4}{3}$

   Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, donc la suite u est décroissante

5. Soit $v_n = u_n - 2$

   (a) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{4}{3} - 2 = \dfrac{1}{3}u_n - \dfrac{2}{3}$

   Or $u_n = v_n + 2$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \dfrac{1}{3}(v_n + 2) - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}v_n$

   Donc la suite v est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{3}$

   (b) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 3 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \dfrac{1}{3^{n-1}}$

   D'où, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_n + 2 = 2 + \dfrac{1}{3^{n-1}}$

   (c) (v_n) tend vers 0 car $-1 < q < 1$. Donc (u_n) tend vers 2.

   (d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{20} v_k = v_0 \times \frac{1 - q^{21}}{1 - q} = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{21}}{\frac{2}{3}} = 9 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{21}}{2}$

   $\displaystyle\sum_{k=0}^{20} u_k = \sum_{k=0}^{20} (v_k + 2) = \left(\sum_{k=0}^{20} v_k\right) + \left(\sum_{k=0}^{20} 2\right) = \left(\sum_{k=0}^{20} v_k\right) + 21 \times 2 = 42 + 9 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{21}}{2}$