T Spé Maths **Devoir en classe n° 1** 20 sept. 2021

EXERCICE 1 — 4 pts

Etudier la limite de chacune des suites suivantes, définies sur $\mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{\sqrt{n}-n}{1-3n} \qquad v_n = \frac{3+5\sin n}{n+1}$$

EXERCICE 2 — 4 pts

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n par : $u_n = \dfrac{4n-1}{n+1}$

1. Déterminer le sens de variation de cette suite.
2. Démontrer que, pour tout entier n, on a : $u_n \in [-1;4[$

EXERCICE 3 — 1 pt

Trouver deux suites (u_n) et (v_n) telles que :

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}(v_n) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}(u_n)\times(v_n) = -\infty$$

EXERCICE 4 — 11 pts

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{4}{3} \end{cases}$

1. Montrer par le calcul que (u_n) n'est pas géométrique.
2. (a) Construire dans un même repère orthonormé (prendre 3 cm ou 3 carreaux pour 1 unité) les courbes d'équation $y = x$ et $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{4}{3}$.
   (b) Représenter les 4 premiers termes de la suite sur (Ox) sans les calculer.
   (c) Emettre une conjecture sur le comportement de la suite u_n.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 2$.
4. Montrer que (u_n) est décroissante.
5. On introduit la suite (v_n) définie pour tout entier n par : $v_n = u_n - 2$
   (a) Montrer que la suite v est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{3}$.
   (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   (c) Préciser la limite de u_n.
   (d) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{20} v_k$ et en déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{20} u_k$