Corrigé DS n° 1

EXERCICE 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 1$.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction dérivable.
   $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{1}{4}(4x^3) + 3x^2 + 2(2x) + 2 = x^3 + 3x^2 + 4x + 2$

   f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction dérivable.
   $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = 3x^2 + 6x + 4$
   Ce trinôme n'a pas de racine ($\Delta = -12 < 0$), il est du signe du coefficient de x^2 sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
signe de $f''(x)$	+	
$f'(x)$	↗	

2. $f'(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 + 4(-1) + 2 = 0$.

x	$-\infty$		$+\infty$
signe de $f''(x)$		+	
$f'(x)$	↗	0	↗
signe de $f'(x)$	$-$	0	+
$f(x)$	↘	$\frac{1}{4}$	↗

3.

EXERCICE 2

- $u_n = \dfrac{2n^3 - n + 1}{3n^2 + n} = \dfrac{n^3\left(2 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)}{n^2\left(3 + \frac{1}{n}\right)} = n \times \dfrac{2 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{3 + \frac{1}{n}}$

  Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2 - \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n^3}\right) = 2$, $\quad \lim\limits_{n\to+\infty}\left(3 + \dfrac{1}{n}\right) = 3$, et $\lim\limits_{n\to+\infty}(n) = +\infty$

  d'où (par produit et quotient) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = +\infty$

- $\sqrt{2} > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{2})^n = +\infty$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-5(\sqrt{2})^n\right) = -\infty$

- $w_n = \dfrac{1 - 2n}{n + \sqrt{n}} = \dfrac{n\left(\frac{1}{n} - 2\right)}{n\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \dfrac{\frac{1}{n} - 2}{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}}$

  Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n} - 2\right) = -2$, et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1$

  d'où (par quotient) $\lim\limits_{n\to+\infty}(w_n) = -2$

- $s_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$

  - si n pair, $s_n = 1 + \dfrac{1}{n}$. Les termes de rang pairs tendent vers 1.
  - si n impair, $s_n = -1 + \dfrac{1}{n}$. Les termes de rang impairs tendent vers -1.

  Donc la suite ne converge pas vers un réel, ne tend pas vers l'infini.
  Elle diverge et n'admet pas de limite.

EXERCICE 3

1. (a) Soit $P(n)$ la proposition : $\boxed{u_n \leqslant n + 4}$.
   - $u_0 = 3$ et $0 + 4 = 4$. Donc $P(0)$ est vraie.
   - Supposons que $u_n \leqslant n + 4$ pour un entier n donné.
     Alors, $\dfrac{3}{4}u_n \leqslant \dfrac{3}{4}(n + 4)$
     $\dfrac{3}{4}u_n + \dfrac{1}{4}n + 1 \leqslant \dfrac{3}{4}(n + 4) + \dfrac{1}{4}n + 1$
     $u_{n+1} \leqslant \dfrac{3}{4}n + 3 + \dfrac{1}{4}n + 1$
     Alors, $u_{n+1} \leqslant n + 4$
     Or, $n + 4 \leqslant n + 5$
     D'où $u_{n+1} \leqslant n + 1 + 4$
     Ainsi on a établi le caractère héréditaire de la proposition $P(n)$
   - Conclusion : on a montré par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant n + 4$.

   (b) $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \dfrac{3}{4}u_n + \dfrac{1}{4}n + 1 - u_n = \dfrac{1}{4}n + 1 - \dfrac{1}{4}u_n = \dfrac{n + 4 - u_n}{4}$

   (c) Etudions le signe de $u_{n+1} - u_n$.
   Comme $u_n \leqslant n + 4$, on a $n + 4 - u_n \geqslant 0$ sur $\mathbb{N}$, donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.
   La suite u est donc croissante.

2. (a) $\forall n \in \mathbb{N},\quad v_{n+1} = u_{n+1} - (n + 1) = \dfrac{3}{4}u_n + \dfrac{1}{4}n + 1 - n - 1 = \dfrac{3}{4}u_n - \dfrac{3}{4}n$
   $= \dfrac{3}{4}u_n + \dfrac{1}{4}n + 1 - n - 1$

$$= \frac{3}{4}u_n - \frac{3}{4}n = \frac{3}{4}(u_n - n) = \frac{3}{4}v_n$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 = 3$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$, d'où $\quad u_n = v_n + n = n + 3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$

(c) $-1 < \frac{3}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} (n) = +\infty$

Exercice 4

1. On cherche a et b tel que $f(-1) = -7$ et $f'(-1) = 0$
   - $f(-1) = -a + b - 4 = -7$
   - f est dérivable sur D en tant que fonction rationnelle définie sur cet intervalle et

     $\forall x \in D, \quad f'(x) = a + 8 \times \frac{-1}{(x-1)^2} = a - \frac{8}{(x-1)^2}$

     d'où $f'(-1) = a - 2$
   - $\begin{cases} f(-1) &= -7 \\ f'(-1) &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -a+b-4 &= -7 \\ a-2 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a &= 2 \\ -a+b &= 4-7 \end{cases}$

     D'où $\begin{cases} a &= 2 \\ b &= -1 \end{cases}$
   - bilan : $\quad \forall x \in D, \quad f(x) = 2x - 1 + \frac{8}{x-1}$
2. $\forall x \in D, \quad f(x) = 2x - 1 + \frac{8}{x-1}$

$$= \frac{(2x-1)(x-1)+8}{x-1}$$
$$= \frac{(2x^2 - 2x - x + 1 + 8}{x-1}$$
$$= \frac{2x^2 - 3x + 9}{x-1}$$

3. $\forall x \in D, \quad f'(x) = \frac{(4x-3)(x-1)-(1)(2x^2-3x+9)}{(x-1)^2} = \ldots = \frac{2x^2-4x-6}{(x-1)^2}$

4.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$2x^2-4x-6$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	-7	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	9	$\nearrow$	

Exercice 5

1. $u_0 = 1 \quad$ et $\quad u_{n+1} = 4u_n + 1$
2. La valeur affichée est $n = 6$. Elle correspond à la première valeur de l'indice pour laquelle u_n est supérieur ou égal à 5000