EXERCICE 2 — 4 pts

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3-x)(\mathrm{e}^x + 3)$.

1. Déterminer la fonction dérivée f' de f.
2. Etudier les variations de f' et en déduire son signe.
3. Dresser le tableau des variations de la fonction f.
4. Déterminer le point de $\mathscr{C}_f$ en lequel la tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite D d'équation $y = 2 - 3x$.

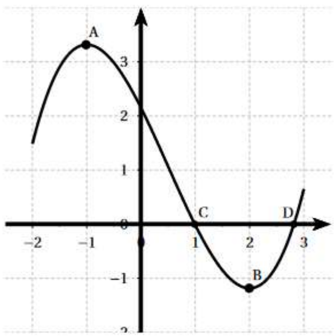
EXERCICE 1 — 7 points

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
   On donne l'expression de la dérivée $f'(x) = (2x+1)^3\mathrm{e}^{-x^2}$.
   a. Vérifier que, pour tout réel x, on a : $f''(x) = -2(2x+1)^2(2x^2+x-3)\mathrm{e}^{-x^2}$.
   b. Etudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$ et préciser les abscisses des points d'inflexion de la courbe de f.

2. On donne la courbe d'une fonction f définie et continue sur $I = [-2;3]$.
   Cette courbe admet deux tangentes horizontales aux point A et B d'abscisses respectives -1 et 2.
   Elle coupe l'axe des abscisses aux points C et D d'abscisses respectives 1 et 2,8.

   On note F la primitive de f vérifiant $F(1) = 0$.



Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer, par lecture graphique, si elle est vraie ou fausse, en justifiant votre réponse.

a. Si $x \in [-2;-1]$, alors $f''(x) \leqslant 0$.

b. La fonction F est décroissante sur $[-1;1]$.

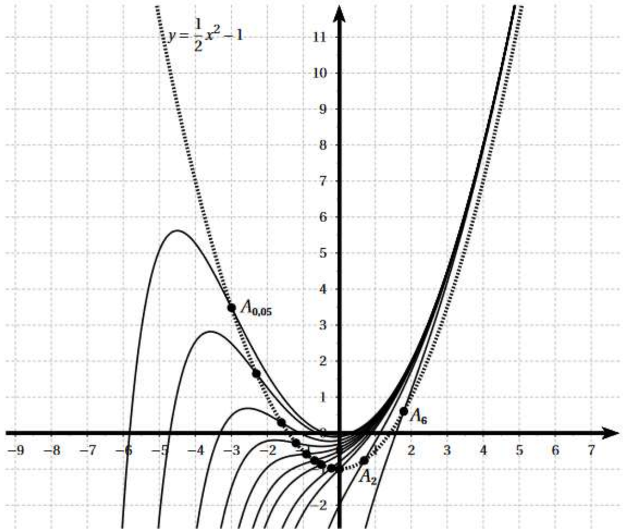
c. La fonction F est convexe sur $[1;2]$.

d. La courbe de F passe par le point D.

EXERCICE 5 — 3 points

Dans cet exercice, toute trace de recherche, toute étape intermédiaire pourront être valorisées.

Soit k un réel strictement positif. On considère les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = \frac{1}{2}x^2 - k\mathrm{e}^{-x}$.
On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un plan muni d'un repère orthonormé.
On a représenté ci-dessous quelques courbes $\mathscr{C}_k$ pour différentes valeurs de k.



1. Justifier que pour tout réel k strictement positif, la courbe $\mathscr{C}_k$ admet un point d'inflexion A_k.
2. Il semblerait que, pour tout réel k strictement positif, les points A_k appartiennent à la parabole d'équation $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$. Est-ce le cas?

Exercice 4

Partie A

La fonction g est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$.

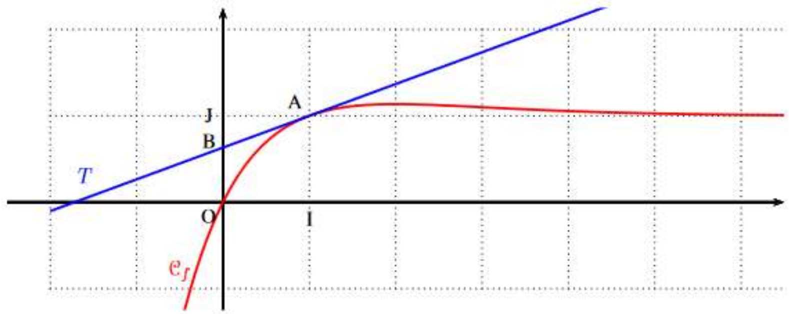
1. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction g sur $[0\ ;\ +\infty[$ et dresser son tableau de variations.
3. Étudier la convexité de g.

Partie B

Dans cette partie, k désigne un réel strictement positif.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{-kx} + 1.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O; I, J), on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f. Cette courbe est représentée ci-dessous pour une certaine valeur de k.
La tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1 coupe l'axe des ordonnées en un point noté B.



1.

1. a. Démontrer que pour tout réel x,

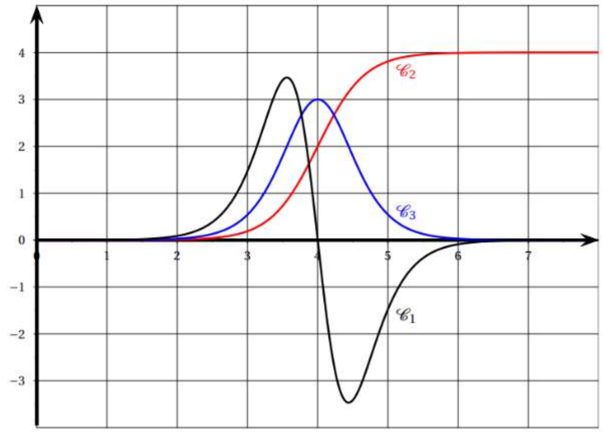
$$f'(x) = \mathrm{e}^{-kx}(-kx + k + 1).$$

1. b. Démontrer que l'ordonnée du point B est égale à $g(k)$ où g est la fonction définie dans la **partie A**.

2. En utilisant la **partie A**, démontrer que le point B appartient au segment [OJ].

Exercice VII **(2 points)**

Le plan est ramené à un repère orthogonal.
On a représenté ci-dessous la courbe d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, ainsi que celle de sa dérivée f' et de sa dérivée seconde f''.



1. Déterminer, en justifiant votre choix, quelle courbe correspond à quelle fonction.

Exercice I **(5 points)**

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle donné :

a) $f(x) = -x + 1 + e^{3x+4}$ sur $\mathbb{R}$.

b) $g(x) = 2x^3 + 3x + 1$ sur $\mathbb{R}$, puis $h(x) = (2x^3 + 3x + 1)^4$ sur $\mathbb{R}$.

c) $i(x) = \frac{e^x}{x}$ sur $]0\ ;+\infty[$ (mettre la dérivée sous forme factorisée).

d) $j(x) = \frac{1}{1+e^{-2x}}$ sur $\mathbb{R}$.

e) $k(x) = \sqrt{x^4 + 3e^{-x^2}}$ sur $\mathbb{R}$.