

6 pts Ex n° 1

Soit les nombres complexes $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{6}$

1. Déterminer une forme trigonométrique de z_1 , z_2 et $Z = \frac{z_1}{z_2}$
2. Déterminer la forme algébrique de Z
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

8 pts Ex n° 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z , associe le point $M' = f(M)$ d'affixe z' tel que :

$$z' = (1 + i)z + 2$$

1. Soit A le point d'affixe $z_A = -2 + 2i$.
Déterminer les affixes des points A' et B vérifiant respectivement : $A' = f(A)$ et $f(B) = A$.
2. Construction de l'image d'un point M
 - a. Montrer qu'il existe un unique point invariant par f (confondu avec son image) dont l'affixe est $2i$; on notera Ω ce point et ω son affixe.
 - b. i. Etablir que, pour tout nombre complexe distinct de ω , $\frac{z' - z}{\omega - z} = -i$.
ii. Soit M un point distinct de Ω . Comparer MM' et $M\Omega$ et déterminer une mesure de l'angle $(\overline{M\Omega}; \overline{MM'})$.
iii. En déduire une méthode de construction de M' à partir de M .

3 pts Ex n° 3

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On note A le point d'affixe i .

A tout point M du plan, distinct de A et d'affixe z , on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{iz}{z - i}$.

Montrer que l'ensemble des points M tels que OMM' soit rectangle en O est inclus dans une droite que vous préciserez.

3 pts Ex n° 4

QCS : 1,5 pt par bonne réponse et $-0,75$ par réponse fausse.

Une seule réponse est exacte par question.

Vous cochez au maximum une réponse par question.

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Soit trois points A , B et C d'affixes respectives a , b et c , deux à deux distincts et tels que le triangle ABC n'est pas équilatéral. Le point M est un point dont l'affixe z est telle que les nombres complexes $\frac{z - b}{c - a}$ et $\frac{z - c}{b - a}$ sont imaginaires purs.

- ☐ M appartient aux cercles de diamètres respectifs $[AC]$ et $[AB]$
- ☐ M est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .
- ☐ M est l'orthocentre du triangle ABC .

2. Soit n un entier naturel. Le nombre $(1 + i)^n$ est un imaginaire pur si et seulement si n s'écrit sous la forme :

- ☐ $2k + 2$ ☐ $4k + 2$ ☐ $8k + 2$ (avec $k \in \mathbb{N}$)