Les experts — Corrigé Interro n° 2

Ex I ① * $\begin{cases} n-4 \mid n+3 \\ n-4 \mid n-4 \end{cases} \Rightarrow n-4 \mid (n+3)-(n-4)$

$\Rightarrow n-4 \mid 7$

* Réciproquement

$\begin{cases} n-4 \mid 7 \\ n-4 \mid n-4 \end{cases} \Rightarrow n-4 \mid 7+(n-4)$

$\Rightarrow n-4 \mid n+3$

* Donc $n-4 \mid n+3 \iff n-4 \mid 7$

or $\mathcal{D}_7 = \{-7; -1; 1; 7\}$

$S = \{n \in \mathbb{Z} \mid n-4 \in \mathcal{D}_7\}$

$S = \{-3; 3; 5; 11\}$

② * $\begin{cases} 3n+1 \mid n+2 \\ 3n+1 \mid 3n+1 \end{cases} \Rightarrow 3n+1 \mid 3(n+2)-(3n+1)$

$\Rightarrow 3n+1 \mid 5$

or $\mathcal{D}_5 = \{-5; -1; 1; 5\}$

d'où $3n+1 = -5 \iff n = -2$

$3n+1 = -1 \iff n = -\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$

$3n+1 = 1 \iff n = 0$

$3n+1 = 5 \iff n = \frac{4}{3} \notin \mathbb{Z}$

donc $n = -2$ ou $n = 0$

* Vérification :

si $n = -2$ $\quad 3n+1 = -5$ et $n+2 = 0$

et on a bien $-5 \mid 0$

si $n = 0$ $\quad 3n+1 = 1$ et $n+2 = 2$

et on a bien $1 \mid 2$

donc $S = \{-2; 0\}$

Ex II démo par récurrence.

Ini : $8^0 - 5^0 = 1 - 1 = 0$

et 0 est bien un multiple de 3.

HR : supposons que $3 \mid 8^n - 5^n$ pour un entier n donné

or $3 \mid 3 \times 5^n$

d'où $3 \mid 8(8^n - 5^n) + (3 \times 5^n)$

$3 \mid 8^{n+1} - 8 \times 5^n + 3 \times 5^n$

$3 \mid 8^{n+1} - 5 \times 5^n$

$3 \mid 8^{n+1} - 5^{n+1}$

on a prouvé le caractère héréditaire de la proposition à démontrer.

Bilan : on en déduit par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 3 \mid 8^n - 5^n$

Ex III Soit $n \in \mathbb{N}$. Il y a 3 cas possibles :

1er cas : $n = 3k \quad (k \in \mathbb{N})$ alors $N = 3\underbrace{k(3k-5)(3k+5)}_{\in \mathbb{Z}}$ donc $3 \mid N$

2ème cas : $n = 3k+1 \quad (k \in \mathbb{N})$ $\quad N = (3k+1)(3k-4)(3k+6)$

$= 3\underbrace{(3k+1)(3k-4)(k+2)}_{\in \mathbb{Z}}$ donc $3 \mid N$

3ème cas : $n = 3k+2 \quad (k \in \mathbb{N})$ $\quad N = (3k+2)(3k-3)(3k+7)$

$= 3\underbrace{(3k+2)(k-1)(3k+7)}_{\in \mathbb{Z}}$ donc $3 \mid N$

Bilan : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 3 \mid N$.

Ex IV On cherche $n \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n^2 - 40 = k^2$

$n^2 - 40 = k^2 \iff n^2 - k^2 = 40 \iff (n-k)(n+k) = 40$

or $n+k \geq 0$ d'où $n-k \geq 0$

dans $\mathbb{N}$ $\mathcal{D}_{40} = \{1; 2; 4; 5; 8; 10; 20; 40\}$

donc $\begin{cases} n-k = 1 \\ n+k = 40 \end{cases}$ ou $\begin{cases} n-k = 2 \\ n+k = 20 \end{cases}$ ou $\begin{cases} n-k = 4 \\ n+k = 10 \end{cases}$ ou $\begin{cases} n-k = 5 \\ n+k = 8 \end{cases}$

$\Rightarrow 2n = 41$ pas de solution dans $\mathbb{N}$; $\begin{cases} n = 11 \\ k = 9 \end{cases}$; $\begin{cases} n = 7 \\ k = 3 \end{cases}$; $\Rightarrow 2n = 13$ pas de sol. dans $\mathbb{N}$

$S = \{7; 11\}$

Scanné avec CamScanner