Corrigé DS n° 1

EXERCICE 1

1. $\forall z \neq \mathrm{i}, \quad z' = \overline{z'} \Leftrightarrow \dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} = \overline{\left(\dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)}$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} = \frac{\overline{z+\mathrm{i}}}{\overline{z-\mathrm{i}}}\\
&\Leftrightarrow \frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} = \frac{\overline{z}-\mathrm{i}}{\overline{z}+\mathrm{i}}\\
&\Leftrightarrow (z+\mathrm{i})(\overline{z}+\mathrm{i}) = (\overline{z}-\mathrm{i})(z-\mathrm{i})\\
&\Leftrightarrow z\overline{z}+\mathrm{i}z+\mathrm{i}\overline{z}-1 = z\overline{z}-\mathrm{i}\overline{z}-\mathrm{i}z-1\\
&\Leftrightarrow 2\mathrm{i}z = -2\mathrm{i}\overline{z}\\
&\Leftrightarrow z = -\overline{z}\\
&\Leftrightarrow \overline{z} = -z
\end{aligned}$$

2. Reformulation : « Montrer que z' réel équivaut à z imaginaire pur ».

EXERCICE 2

1. (a) $z_{B'} = \dfrac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \dfrac{\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{1^2+1^2} = -\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

(b) $\forall z \neq \mathrm{i}, \quad z' = 2 \iff \dfrac{\mathrm{i}z}{z-\mathrm{i}} = 2 \iff \mathrm{i}z = 2z-2\mathrm{i} \iff (2-\mathrm{i})z = 2\mathrm{i}$

$$\begin{aligned}
&\iff z = \frac{2\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}\\
&\iff z = \frac{2\mathrm{i}(2+\mathrm{i})}{5}\\
&\iff z = -\frac{2}{5}+\frac{4}{5}\mathrm{i}
\end{aligned}$$

(c) $\forall z \neq \mathrm{i}, \quad \overline{z'} = \overline{\left(\dfrac{\mathrm{i}z}{z-\mathrm{i}}\right)} = \dfrac{\overline{\mathrm{i}z}}{\overline{z-\mathrm{i}}} = \dfrac{-\mathrm{i}\,\overline{z}}{\overline{z}+\mathrm{i}}$

Soit $z \in \mathrm{i}\mathbb{R}\setminus\{\mathrm{i}\}$ alors $\overline{z} = -z$

d'où $\overline{z'} = \dfrac{\mathrm{i}\,z}{-z+\mathrm{i}} = -\dfrac{\mathrm{i}z}{z-\mathrm{i}} = -z'$ donc $z' \in \mathrm{i}\mathbb{R}$

(d) $\forall z \neq \mathrm{i}, \quad z' = z \iff \dfrac{\mathrm{i}z}{z-\mathrm{i}} = z$

$$\begin{aligned}
&\iff \mathrm{i}z = z^2-\mathrm{i}z\\
&\iff z^2-2\mathrm{i}z = 0\\
&\iff z(z-2\mathrm{i}) = 0\\
&\iff z = 0 \text{ ou } z = 2\mathrm{i}
\end{aligned}$$

Donc les points invariants sont l'origine O du repère et le point d'affixe $2\mathrm{i}$.

2. Soit $z \neq \mathrm{i}$.

(a)
$$\begin{aligned}
z' = \frac{\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)}{x+\mathrm{i}y-\mathrm{i}} = \frac{-y+\mathrm{i}x}{x+\mathrm{i}(y-1)} &= \frac{[-y+\mathrm{i}x][x-\mathrm{i}(y-1)]}{x^2+(y-1)^2}\\
&= \frac{[-xy+x(y-1)]+\mathrm{i}[x^2+y(y-1)]}{x^2+(y-1)^2}\\
&= \frac{-x}{x^2+(y-1)^2}+\mathrm{i}\,\frac{x^2+y^2-y}{x^2+(y-1)^2}
\end{aligned}$$

(b) Pour $M \neq A$, $M \in \mathscr{E} \iff z' \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(z') = 0$

$$\begin{aligned}
&\iff x^2+y^2-y = 0\\
&\iff x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4} = 0\\
&\iff (x-0)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2\\
&\iff M \in \mathscr{C}_{\Omega,r} \quad \text{avec } z_\Omega = \frac{1}{2}\mathrm{i} \text{ et } r = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Or le point $A(0;1)$ appartient à ce cercle car ses coordonnées vérifient l'équation du cercle.

Donc $\mathscr{E}$ est le cercle de centre Ω d'affixe $\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$, privé de A.

EXERCICE 3

$\longrightarrow$ Voir cours pour les démonstrations.

EXERCICE 4

1. Soit $z = x+\mathrm{i}y$ avec $(x;y) \in \mathbb{R}^2$.

$z^2 - z\overline{z} = -6 \Leftrightarrow x^2+2xy\mathrm{i}-y^2-(x^2+y^2) = -6 \Leftrightarrow -2y^2+2xy\mathrm{i} = -6$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} -2y^2 = -6\\ xy = 0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 3\\ xy = 0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{3} \text{ ou } y = -\sqrt{3}\\ x = 0 \text{ ou } y = 0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{3} \text{ ou } y = -\sqrt{3}\\ x = 0\end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{S} = \left\{\mathrm{i}\sqrt{3};\mathrm{i}\sqrt{3}\right\}$ proposition fausse

2. $\left\{\begin{array}{l} 2z_1 - z_2 = 1+3\mathrm{i} \\ \overline{z_1} + 2\,\overline{z_2} = 3+\mathrm{i} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 2z_1 - z_2 & = & 1+3\mathrm{i} \\ \overline{z_1 + 2z_2} & = & \overline{3-\mathrm{i}} \end{array}\right.$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} 2z_1 - z_2 & = & 1+3\mathrm{i} \\ z_1 + 2z_2 & = & 3-\mathrm{i} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} 2z_1 - z_2 & = & 1+3\mathrm{i} \\ 5z_1 & = & 5+5\mathrm{i} \quad (2L_1 + L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} z_1 & = & 1+\mathrm{i} \\ 2(1+\mathrm{i}) - z_2 & = & 1+3\mathrm{i} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} z_1 & = & 1+\mathrm{i} \\ z_2 & = & 1-\mathrm{i} \end{array}\right.$$

D'où $z_1 = \overline{z_2}$

Donc la proposition est vraie