Barème sur 20 points

EXERCICE 1 — 3 pts

A tout nombre complexe z distinct de i, on associe le nombre complexe z' tel que : $z' = \dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$

1. Montrer que « $z' = \overline{z'}$ » équivaut à « $\overline{z} = -z$ ».
2. Reformuler la question précédente en utilisant les termes « réel » et « imaginaire pur ».

EXERCICE 2 — 11 pts

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$
On note A le point d'affixe i.

A tout point M du plan, distinct de A et d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \dfrac{\mathrm{i}z}{z-\mathrm{i}}$
Le point M' est appelé l'image de M.

1. **a.** Calculer l'affixe $z_{B'}$ du point B' image du point B d'affixe $z_B = 1$, et la donner sous forme algébrique.
   b. Déterminer l'affixe du point C tel que l'image de C ait pour affixe 2, et la donner sous forme algébrique.
   c. Exprimer $\overline{z'}$ en fonction de $\overline{z}$, puis en déduire que si z est un imaginaire pur distinct de i, alors z' l'est aussi.
   d. Déterminer les points M du plan tels que l'on ait M = M'
2. Etant donné un nombre complexe z distinct de i, on pose $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y désignent deux nombres réels.
   a. Montrer l'égalité : $z' = \dfrac{-x}{x^2+(y-1)^2} + \mathrm{i}\,\dfrac{x^2+y^2-y}{x^2+(y-1)^2}$
   b. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe z telle que z' soit réel.

EXERCICE 3 Démonstrations de cours — 2 pts

Prérequis → On pourra utiliser la propriété suivante : $\forall (z; z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}, \quad \overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

1. Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad \overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$
2. En déduire que : $\forall (z; z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, \quad \overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

EXERCICE 4 Vrai ou faux — 4 pts

Pour chacune des propositions suivantes, déterminer en justifiant si elle est vraie ou fausse.

1. L'équation $z^2 - z\overline{z} = -6$ admet pour ensemble solution $\mathscr{S} = \left\{\mathrm{i}\sqrt{3}\right\}$
2. Les nombres complexes z_1 et z_2 solutions du système $\begin{cases} 2z_1 - z_2 = 1+3\mathrm{i} \\ \overline{z_1} + 2\,\overline{z_2} = 3+\mathrm{i} \end{cases}$ sont conjugués.