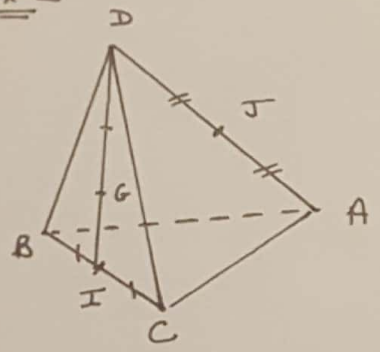
Corrigé DS n° 3

Ex 2



① a) $2\,\vec{IJ} = 2\left(\vec{IB} + \vec{BD} + \vec{DJ}\right)$

$= 2\vec{IB} + 2\vec{BD} + 2\vec{DJ}$

$= \vec{CB} + 2\vec{BD} + \vec{DA}$

$= \vec{CA} + \vec{AB} + 2\vec{BA} + 2\vec{AD} + \vec{DA}$

$= -\vec{AB} + \vec{AD} - \vec{AC}$

b) $3\,\vec{DG} = 3\left(\frac{2}{3}\vec{DI}\right)$

$= 2\,\vec{DI}$

$= 2\left(\vec{DB} + \vec{BI}\right)$

$= 2\vec{DB} + \vec{BC}$

$= -2\vec{AD} + 2\vec{AB} - \vec{AB} + \vec{AC}$

$= \vec{AB} - 2\vec{AD} + \vec{AC}$

c) $\vec{IJ} + \vec{DG} = \frac{1}{2}\left(-\vec{AB} + \vec{AD} - \vec{AC}\right) + \frac{1}{3}\left(\vec{AB} - 2\vec{AD} + \vec{AC}\right)$

$= -\frac{1}{6}\vec{AB} - \frac{1}{6}\vec{AD} - \frac{1}{6}\vec{AC}$

$= -\frac{1}{6}\left(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}\right)$

$= -\frac{1}{6}\vec{u}$ $\rightarrow$ donc $\vec{IJ} + \vec{DG}$ colinéaire à $\vec{u}$

$\vec{u} = -6\,\vec{IJ} - 6\,\vec{DG}$

$\vec{u}$ est donc coplanaire à $\vec{IJ}$ et $\vec{DG}$ car il s'exprime comme une combinaison linéaire de ces 2 vecteurs.

② dans le repère $(A\,;\,\vec{AB}\,;\,\vec{AC}\,;\,\vec{AD})$

a) I milieu de [BC] or $B(1;0;0)$, $C(0;1;0)$ donc $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$

J milieu de [AD] donc $J\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$

$\vec{DG} = \frac{2}{3}\vec{DI}$ or $\vec{DI}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-0\\ \frac{1}{2}-0\\ 0-1\end{pmatrix}$

$\vec{DG} = \frac{2}{3}\vec{DI} \iff \begin{cases} x_G - 0 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}-0\right)\\ y_G - 0 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}-0\right)\\ z_G - 1 = \frac{2}{3}(0-1)\end{cases}$

$\iff \begin{cases} x_G = \frac{1}{3}\\ y_G = \frac{1}{3}\\ z_G = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}\end{cases}$ donc $G\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\vec{DG}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ $\vec{IJ}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

c) On cherche s'il existe 2 réels α et β tels que $\vec{u} = \alpha\,\vec{DG} + \beta\,\vec{IJ}$ (*)

(*) $\iff \begin{cases} \frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{2}\beta = 1\\ \frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{2}\beta = 1\\ -\frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{2}\beta = 1\end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{2}\beta = 1\\ -\frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{2}\beta = 1\end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{1}{3}\alpha = 2 & (L_1 + L_2)\\ -\frac{1}{2}\beta = 3 & (2L_1 + L_2)\end{cases}$

$\iff \alpha = \beta = -6$

donc $\vec{u} = -6\,\vec{DG} - 6\,\vec{IJ}$ $\rightarrow$ combi. linéaire de $\vec{DG}$ et $\vec{IJ}$

donc ces 3 vecteurs sont coplanaires.