Prépa DS3 sujet n° 2 - corrigé

T Spé maths

EXERCICE 1

Partie A Etude d'une fonction auxiliaire : $g(x) = \mathrm{e}^x + x + 1$.

1. • g est strict. croissante sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fcts strict. crois. sur $\mathbb{R}$.

   • $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to+\infty}(x+1) & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(\mathrm{e}^x) & = & +\infty \end{array}\right\} \underset{\text{somme}}{\overset{\text{par}}{\Rightarrow}} \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

   • $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to-\infty}(x+1) & = & -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}(\mathrm{e}^x) & = & 0 \end{array}\right\} \underset{\text{somme}}{\overset{\text{par}}{\Rightarrow}} \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$

   • g est continue (en tant que somme de fonctions continues) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$
   L'intervalle image de $\mathbb{R}$ par g est $\mathbb{R}$.
   On a : $0 \in \mathbb{R}$ donc, d'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$.

2. Par dichotomie, on obtient à la calculatrice : $\alpha \approx -1,27$.

3. On en déduit, d'après les variations de g, le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B $f(x) = \dfrac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$

1. $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to-\infty}(x\mathrm{e}^x) & = & 0 \quad \text{(croissance comparée)} \\ \lim\limits_{x\to-\infty}(\mathrm{e}^x+1) & = & 1 \end{array}\right\} \underset{\text{quotient}}{\overset{\text{par}}{\Rightarrow}} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

   Donc l'axe des abscisses est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $-\infty$.

2. (a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - x = \dfrac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} - \dfrac{x(\mathrm{e}^x+1)}{\mathrm{e}^x+1} = \dfrac{-x}{\mathrm{e}^x+1} = \dfrac{-x}{\mathrm{e}^x} \times \dfrac{1}{1+\frac{1}{\mathrm{e}^x}}$

   $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right) & = & 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-x}{\mathrm{e}^x}\right) & = & 0 \quad \text{(crois. comp.)} \end{array}\right\} \underset{\text{et quotient}}{\overset{\text{par produit}}{\Longrightarrow}} \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x) = 0$

   Donc la droite Δ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

   (b) donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

3. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient **défini sur** $\mathbb{R}$ de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

   $\forall x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{[1\times\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x](\mathrm{e}^x+1) - \mathrm{e}^x \times x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^{2x}+x\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$

   D'où : $f' x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+1+x)}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = \dfrac{g(x)\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$

   Or, $\dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc f' est du signe de g sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

4. • Equation de T : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ soit : $y = \dfrac{1}{2}x$.

   • Pour étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et T, il suffit d'étudier le signe de $f(x) - \dfrac{1}{2}x$.

   $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - \dfrac{1}{2}x = \dfrac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} - \dfrac{x}{2} = \dfrac{2x\mathrm{e}^x - x(\mathrm{e}^x+1)}{2(\mathrm{e}^x+1)} = \dfrac{x\mathrm{e}^x - x}{2(\mathrm{e}^x+1)} = \dfrac{x(\mathrm{e}^x-1)}{2(\mathrm{e}^x+1)}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
e^x-1		$-$	0	$+$	
$2(\mathrm{e}^x+1)$		$+$		$+$	
$f(x)-\dfrac{1}{2}x$		$+$	0	$+$	

5. Donc $\mathscr{C}$ est au-dessus de T sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 2

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}$

   $\dfrac{x_{\overrightarrow{AC}}}{x_{\overrightarrow{AB}}}=\dfrac{0}{-3}=0 \qquad \dfrac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}=\dfrac{2}{1}=2\neq 0$

   $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C non alignés définissent un plan.

2. Montrons que $\overrightarrow{DE}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, et $\overrightarrow{AC}$.

   $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}-6\\2\\0\end{pmatrix}$

   On cherche un couple de réels $(\alpha;\beta)$ tels que : $\overrightarrow{DE}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$

   $$\overrightarrow{DE}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC} \iff \begin{cases}-3\alpha+0\beta &= -6\\ 0\alpha-2\beta &= 2\\ \alpha+2\beta &= 0\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha &= 2\\ \beta &= -1\end{cases}$$

   Ainsi $\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont coplanaires.

3. Testons si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont coplanaires.

   $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-7\\0\\-2\end{pmatrix}$

   On cherche un couple de réels $(\alpha;\beta)$ tels que : $\overrightarrow{AE}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$

   $$\overrightarrow{AE}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC} \iff \begin{cases}-3\alpha+0\beta &= -7\\ 0\alpha-2\beta &= 0\\ \alpha+2\beta &= -2\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha &= \dfrac{7}{3}\\ \beta &= 0\\ \dfrac{7}{3} &= -2\end{cases}$$

   Il n'y a pas de solution, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires, donc le point E n'appartient pas au plan (ABC).

4. La droite (DE) est parallèle au plan (ABC) car le vecteur $\overrightarrow{DE}$ est coplanaire à $\overrightarrow{AB}$, et $\overrightarrow{AC}$. Comme de plus le point E n'appartient pas au plan (ABC), on peut préciser que (DE) est strictement parallèle au plan (ABC) (car non incluse dans ce plan).

EXERCICE 3

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{RS} &= \overrightarrow{RH}+\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{DS}\\
&= \frac{3}{4}\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{HD}+\frac{3}{4}\overrightarrow{DC}\\
&= \frac{3}{4}(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DH})+\overrightarrow{HD}+\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EC}\right)\\
&= \frac{3}{4}\overrightarrow{ED}-\frac{3}{4}\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{HD}+\frac{3}{4}\overrightarrow{DE}+\frac{3}{4}\overrightarrow{EC}\\
&= \frac{1}{4}\overrightarrow{HD}+\frac{3}{4}\overrightarrow{EC} \qquad \text{car } \frac{3}{4}\overrightarrow{ED}+\frac{3}{4}\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{0}
\end{aligned}$$