T Spé maths

Prépa DS3 sujet n° 2

Exercice 1 = Fiche 25 améliorée distribuée vendredi ... points

Partie A : Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \mathrm{e}^x + x + 1$.

1. Etudier les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une solution unique α .
3. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}.
4. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et interpréter graphiquement le résultat.
2. On note Δ la droite d'équation $y = x$.
   (a) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - x\right) = 0$, puis interpréter graphiquement ce résultat.
   (b) En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. (a) Montrer que, pour tout réel x, on a : $f'(x) = \dfrac{g(x)\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}$
   (b) En déduire les variations de f.
4. (a) Déterminer une équation de T, tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   (b) On admet que, pour tout réel x, on a : $f(x) - \dfrac{1}{2}x = \dfrac{x(\mathrm{e}^x - 1)}{2(\mathrm{e}^x + 1)}$
   Dresser le tableau de signe de $f(x) - \dfrac{1}{2}x$ sur $\mathbb{R}$.
   (c) En déduire la position relative de $\mathscr{C}$ et T.

Exercice 2 ... pts

Dans un repère de l'espace, on considère les points :

$A(1;2;3)$, $B(7;-2;5)$, $C(4;3;1)$, $D(-3;-1;3)$, et $E(-6;2;1)$.

1. Justifier que les points A, B et C définissent un plan.
2. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont coplanaires.
3. Le point E appartient-il au plan (ABC) ? Justifier votre réponse.
4. Que peut-on dire de la position relative de la droite (DE) et du plan (ABC) ?

Exercice 3 ... pts

On considère un cube $ABCDEFGH$.

Les points R et S sont définis par : $\overrightarrow{ER} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{DS} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{DC}$

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{RS}$ en fonction de $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{HD}$