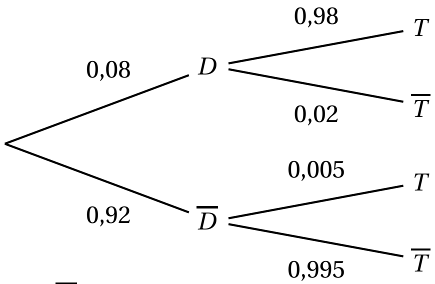
Corrigé Type bac mercredi 28 février

EXERCICE 1

Partie A

1. 

0,5 pt

2. D et $\overline{D}$ forment une partition de l'univers, donc d'après la loi des probabilités totales :
$P(T) = P(D \cap T) + P\left(\overline{D} \cap T\right)$

or $\quad P(D \cap T) = P(D) \times P_D(T) = 0,08 \times 0,98 = 0,0784$

et $\quad P\left(\overline{D} \cap T\right) = P\left(\overline{D}\right) \times P_{\overline{D}}(T) = 0,92 \times 0,005 = 0,00460.$

Donc : $\quad P(T) = 0,0784 + 0,0046 = 0,083.$ 1 pt

3. (a) On cherche $\;P_T(D)$.
$P_T(D) = \dfrac{P(T \cap D)}{P(T)} = \dfrac{0,0784}{0,083} \approx 0,945$ arrondi au millième. 0,5 pt

   (b) $P_T(D) = 0,945$ au millième près, donc $P_T(D) < 0,95$, donc le test ne sera pas commercialisé. 0,25 pt

Partie B

1. (a) On a une répétition de 5 expériences aléatoires identiques et indépendantes (5 contrôles d'athlète) à deux issues possibles :
   - succès = « test positif »de probabilité $p = 0,103$.
   - échec = $\overline{\text{succès}}$

   0,75 pt

   Donc **le nombre de succès X** suit la loi binomiale $\mathscr{B}(5\,;\,0,103)$.

   (b) On sait que $E = n \times p = 5 \times 0,103 = 0,515$: donc sur un grand nombre de contrôles, il y aura à peu près 1 athlète sur 10 contrôlé positif. 0,5 pt

   (c) La probabilité qu'aucun athlète ne soit contrôlé positif est :
$p(X = 0) = \dbinom{5}{0} \times 0,103^0 \times (1 - 0,103)^5 = 0,897^5 \approx 0,5807$ soit environ 0,581 au millième près.
Donc la probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif est :
$p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) \approx 1 - 0,581$, soit 0,419 au millième près. 0,5 pt

2. (a) Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre d'athlètes positifs au test sur les n athlètes contrôlés.
X_n suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;\,0,103)$.

   On a $\quad P(X_n = 0) = 0,897^n$.
   Donc $\quad p_n = P(X_n \geqslant 1) = 1 - P(X_n = 0) = 1 - 0,897^n$ 0,25 pt

   (b) $\forall n \in \mathbb{N},\;\; p_n \geqslant 0,75 \iff 1 - 0,897^n \geqslant 0,75 \iff 0,897^n \leqslant 0,25$ 0,25 pt

   (c) i.
```
def seuil() :
  n = 1
  while 0.897**n>0.25 :
    n = n+1
  return n
```
0,25 pt

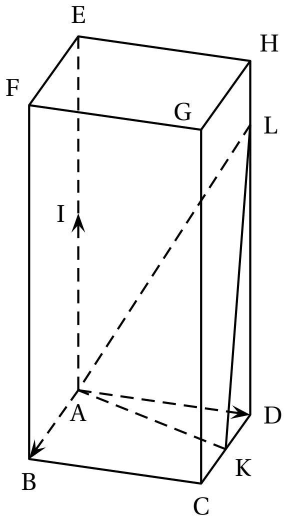
   ii. On obtient en sortie $\;n = 13$ 0,25 pt

   Remarque : on peut résoudre l'inéquation en utilisant la fonction ln :

$$\begin{aligned} 1 - 0,897^n \geqslant 0,75 &\iff 0,897^n \leqslant 0,25 \\ &\iff n\,\ln(0,897) \leqslant \ln(0,25) \quad \text{(car ln croissante sur }]0;+\infty[.\\ &\iff n \geqslant \frac{\ln(0,25)}{\ln(0,897)} \quad \text{(car } \ln(0,897) < 0). \end{aligned}$$

   Or $\dfrac{\ln(0,25)}{\ln(0,897)} \approx 12,8$ d'où $n \geqslant 13$.

EXERCICE 2



1. On a : A(0 ; 0 ; 0), C(1 ; 1 ; 0) et D(0 ; 1 ; 0).
   D'où $\mathrm{K}\left(\dfrac{x_D+x_C}{2} ; \dfrac{y_D+y_C}{2} ; \dfrac{z_D+z_C}{2}\right)$ donc $\mathrm{K}\left(\dfrac{1}{2} ; 1 ; 0\right)$, et $\overrightarrow{\mathrm{AK}}\left(\dfrac{1}{2} ; 1 ; 0\right)$
   et on a $\overrightarrow{\mathrm{AL}}\left(0 ; 1 ; \dfrac{3}{2}\right)$. **0,5 pt**

2. (a) ✦ $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AK}} = 3 - 3 + 0 = 0$ **0,5 pt**

   ✦ $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AL}} = 0 - 3 + 3 = 0$

   le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires ** du plan (AKL), il est donc orthogonal à ce plan et c'est donc un vecteur normal à ce plan.
   ** **N.B.** On pourrait justifier que les vecteurs ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles $\left(\dfrac{0}{0,5} \neq \dfrac{1}{1}\right)$ mais on peut s'en dispenser ici puisque le sujet fait référence au plan (AKL), inutile donc de justifier que les points A, K et L ne sont pas alignés.

   (b) On a donc $M(x ; y ; z) \in (\mathrm{AKL}) \Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{A}M} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \Longleftrightarrow 6x - 3y + 2z + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$ et comme A appartient à ce plan on a : $0 + 0 + 0 + d = 0$.
   Une équation cartésienne de (AKL) est donc $6x - 3y + 2z = 0$. **0,5 pt**

   (c) La droite Δ contient D(0 ; 1 ; 0) et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{n}$ (car $\Delta \perp$ (AKL), donc une représentation paramétrique de Δ est : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 6t \\ y & = & 1 - 3t \\ z & = & 2t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$. **0,5 pt**

   (d) On cherche les coordonnées du projeté orthogonal du point D sur (AKL).
   Par définition de Δ, ce point est le point d'intersection de (AKL) et de Δ, donc ses coordonnées $(x ; y ; z)$ vérifient le système :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} 6x - 3y + 2z & = & 0 \\ x & = & 6t \\ y & = & 1 - 3t \\ z & = & 2t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$$
   D'où : $6 \times 6t + (-3) \times (1 - 3t) + 2 \times 2t = 0 \Longleftrightarrow 49t = 3 \Longleftrightarrow t = \dfrac{3}{49}$.

   On obtient par substitution : **0,75 pt**
   $$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 6 \times \dfrac{3}{49} \\ y & = & 1 - 3 \times \dfrac{3}{49} \\ z & = & 2 \times \dfrac{3}{49} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \dfrac{18}{49} \\ y & = & \dfrac{40}{49} \\ z & = & \dfrac{6}{49} \end{array}\right..$$
   Conclusion : $\mathrm{N}\left(\dfrac{18}{49} ; \dfrac{40}{49} ; \dfrac{6}{49}\right)$ est bien le proj. ortho. de D sur le plan (AKL).

3. (a) Comme ABCDEFGH est un pavé droit, le triangle ADK est rectangle en D, et (LD) est la hauteur issue de L dans le tétraèdre ADKL.
   On a par définition AD = 1 et DK = $\dfrac{1}{2}$.
   Donc $\mathscr{A}(\mathrm{ADK}) = \dfrac{\mathrm{AD} \times \mathrm{DK}}{2} = \dfrac{1}{4}$.
   D'autre part DL = $\dfrac{3}{2}$, donc $\mathscr{V}(\mathrm{ADKL}) = \dfrac{\frac{1}{4} \times \frac{3}{2}}{3} = \dfrac{1}{8}$. **0,75 pt**

   (b) La distance du point D au plan (AKL) correspond à la longueur DN, car N est le projeté orthogonal de D sur le plan (AKL).
   On a $\overrightarrow{\mathrm{DN}}\left(\dfrac{18}{49} ; \dfrac{40}{49} - 1 ; \dfrac{6}{49}\right)$, soit $\overrightarrow{\mathrm{DN}}\left(\dfrac{18}{49} ; \dfrac{-9}{49} ; \dfrac{6}{49}\right)$, donc :
   $\mathrm{DN}^2 = \left(\dfrac{18}{49}\right)^2 + \left(\dfrac{-9}{49}\right)^2 + \left(\dfrac{6}{49}\right)^2 = \dfrac{18^2 + 9^2 + 6^2}{49^2} = \ldots = \dfrac{9}{49}$.
   Donc DN = $\sqrt{\dfrac{9}{49}} = \dfrac{3}{7}$. **0,75 pt**

   (c) En prenant comme base le triangle AKL, on a :
   $\mathscr{V}(\mathrm{ADKL}) = \dfrac{\mathscr{A}(\mathrm{AKL}) \times \mathrm{DN}}{3}$, soit $\dfrac{1}{8} = \dfrac{\mathscr{A}(\mathrm{AKL}) \times \frac{3}{7}}{3}$, d'où
   $\mathscr{A}(\mathrm{AKL}) = 7 \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{7}{8}$ (u. a.). **0,75 pt**

EXERCICE 3

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\quad g(x) = (x+2)\mathrm{e}^{x-4} - 2$.

1. $$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} (x-4) &= +\infty \\ \lim_{X\to+\infty} (\mathrm{e}^{X}) &= +\infty \end{aligned}\right\} \underset{\textbf{par composée}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x-4} = +\infty$$

   De plus $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (x+2) = +\infty$, donc par produit de limites : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (x+2)\mathrm{e}^{x-4} = +\infty$.

   D'où par somme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ **0,5 pt**

2. On a, pour tout réel x :
   $g(x) = x\mathrm{e}^{x-4} + 2\mathrm{e}^{x-4} - 2 = x\mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{-4} + 2\mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{-4} - 2 = \mathrm{e}^{-4}\left(x\mathrm{e}^{x} + 2\mathrm{e}^{x}\right) - 2$.
   Or $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{x} = 0$ par **croissance comparée**.
   D'où par somme $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(x\mathrm{e}^{x} + 2\mathrm{e}^{x}\right) = 0$
   d'où par produit et somme $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(\mathrm{e}^{-4}\left(x\mathrm{e}^{x} + 2\mathrm{e}^{x}\right) - 2\right) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = -2$
   Interprétation graphique : on en déduit que la droite d'équation $y = -2$ est asymptote à la courbe de g en $-\infty$. **0,5 pt**

3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{x-4} + (x+2) \times 1 \times \mathrm{e}^{x-4} = \mathrm{e}^{x-4}(1 + x + 2) = \mathrm{e}^{x-4}(x+3)$.
   On sait que quel soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{x-4} > 0$; le signe de $g'(x)$ est donc celui de $x+3$ qui s'annule pour $x = -3$ est positif pour $x > -3$ et négatif pour $x < -3$, d'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	-2	↘	$-2-\mathrm{e}^{-7}$	↗	$+\infty$

   On a $g(-3) = (-3+2)\mathrm{e}^{-3-4} - 2 = -\mathrm{e}^{-7} - 2 < 0$.

4. • $g(x) \leqslant -2$ sur $]-\infty; -3]$ donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution sur cet intervalle.
   • g est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[-3; +\infty[$.
   L'intervalle image de $[-3; +\infty[$ par g est $[-2-\mathrm{e}^{-7}; +\infty[$ qui contient 0.
   Donc d'après un corollaire du TVI (ou "théo de la bijection"), on peut en déduire qu'il existe un réel unique α de $]-3\,;\,+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
   • **Bilan** : l'équation $g(x) = 0$ admet bien une solution unique α sur $\mathbb{R}$. **0,75 pt**

5. Signe de $g(x)$ (obtenu directement d'après le tableau de variation de g) :
   • $g(\alpha) = 0$;
   • sur $]-\infty\,;\,\alpha[$, $g(x) < 0$; **0,25 pt**
   • sur $]\alpha\,;\,+\infty[$, $g(x) > 0$

6. La calculatrice donne $g(3{,}069) \approx -0{,}002\,006$ et $g(3{,}070) \approx 0{,}000\,38$, donc $3.069 < \alpha < 3{,}070$. **0,25 pt**

Partie B : Étude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\quad f(x) = x^2 - x^2\mathrm{e}^{x-4}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = 0 \iff x^2 - x^2\mathrm{e}^{x-4} = 0 \iff x^2\left(1 - \mathrm{e}^{x-4}\right) = 0 \iff \left\{\begin{array}{l} x^2 = 0 \\ \text{ou} \\ 1 - \mathrm{e}^{x-4} = 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ \text{ou} \\ 1 = \mathrm{e}^{x-4} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ \text{ou} \\ 0 = x-4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ \text{ou} \\ 4 = x \end{array}\right.$$

   L'équation a deux solutions : 0 et 4. **0,5 pt**

2. (a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x - (2x)(\mathrm{e}^{x-4}) - (x^2)(1\,\mathrm{e}^{x-4}) = -x\left(-2 + 2\mathrm{e}^{x-4} + x\mathrm{e}^{x-4}\right)$
   $= -x\left(-2 + (2+x)\mathrm{e}^{x-4}\right)$
   $= -xg(x)$ **0,5 pt**

   (b) Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$		$-$	
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		↘	0	↗	$f(\alpha)$	↘	

   0,5 pt

   (c) D'après la question précédente sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ la fonction est croissante puis décroissante : $f(\alpha)$ est donc le maximum de la fonction sur cet intervalle.
   On a vu à la question **A. 3.** que α est le réel tel que $g(\alpha) = 0$

   Or $g(\alpha) = 0 \iff (\alpha+2)\mathrm{e}^{\alpha-4} - 2 = 0 \iff (\alpha+2)\mathrm{e}^{\alpha-4} = 2 \iff \mathrm{e}^{\alpha-4} = \dfrac{2}{\alpha+2}$.

   Donc $f(\alpha) = \alpha^2\left(1 - \mathrm{e}^{x-4}\right) = \alpha^2\left(1 - \dfrac{2}{\alpha+2}\right) = \alpha^2\left(\dfrac{\alpha+2-2}{\alpha+2}\right) = \alpha^2 \times \dfrac{\alpha}{\alpha+2}$.

   Finalement $f(\alpha) = \dfrac{\alpha^3}{\alpha+2}$ **0,5 pt**

Exercice 4

Partie A

1. $a_1 = a_0 \times \dfrac{85}{100} + 450 = 200 \times \dfrac{85}{100} + 450 = 620$ 0,25 pt

2. • le terme $0,85a_n$ correspond au nombre de collaborateurs restés en télétravail entre le mois n et le mois $n+1$ (prendre 85 % de a_n revient à multiplier par 0,85).
   • le terme 450 correspond au nombre de collaborateurs supplémentaires qui choisissent de passer en télétravail le mois $n+1$.
   Donc, pour tout entier naturel n, on a bien : $a_{n+1} = 0,85a_n + 450$. 0,25 pt

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = a_n - 3000$; on en déduit que $a_n = v_n + 3000$.

   (a) • $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = a_{n+1} - 3000$
   $$\begin{aligned} &= 0,85a_n + 450 - 3000\\ &= 0,85\,(v_n + 3000) - 2550\\ &= 0,85v_n + 2550 - 2550\\ &= 0,85v_n\end{aligned}$$
   • $v_0 = u_0 - 3000 = 200 - 3000 = -2800$
   Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,85$ et de premier terme $v_0 = -2800$. 0,5 pt

   (b) On en déduit que, pour tout n, on a $v_n = v_0 \times q^n = -2800 \times 0,85^n$. 0,25 pt

   (c) Or $a_n = v_n + 3000$ donc, pour tout entier naturel n :
   $a_n = -2800 \times 0,85^n + 3000$. 0,25 pt

4. (a) La suite $(0,85^n)$ est une suite géométrique décroissante car $0 < 0,85 < 1$.
   Donc $(-2800 \times 0,85^n)$ est une suite croissante
   Donc $(-2800 \times 0,85^n + 3000)$, c'est à dire (a_n) est croissante. 0,5 pt

   (b) A la calculatrice on trouve que c'est au bout de 11 mois que a_n dépasse 2500. 0,25 pt
   N.B. Résolution de l'inéquation $a_n > 2500$ avec la fonction ln :
   $$\begin{aligned} a_n > 2500 &\iff -2800 \times 0,85^n + 3000 > 2500 \iff 500 > 2800 \times 0,85^n\\ &\iff 0,85^n < \frac{500}{2800}\\ &\iff \ln\left(0,85^n\right) < \ln\left(\frac{500}{2800}\right) \quad (\text{car ln croissante sur}]0;+\infty[)\\ &\iff n \times \ln(0,85) < \ln\left(\frac{5}{28}\right) \iff n > \frac{\ln\left(\frac{5}{28}\right)}{\ln(0,85)} \quad (\text{car } \ln(0,85) < 0)\end{aligned}$$
   Or $\dfrac{\ln\left(\frac{5}{28}\right)}{\ln(0,85)} \approx 10,6$, donc le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2 500 est 11.

Partie B

1. f est une fonction rationnelle définie sur $\mathrm{I} = [0\ ,\ +\infty[$ donc dérivable sur I.
   $\forall x \in [0\ ,\ +\infty[,\ f'(x) = \dfrac{5 \times (x+2) - (5x+4) \times 1}{(x+2)^2} = \dfrac{5x + 10 - 5x - 4) \times 1}{(x+2)^2} = \dfrac{6}{(x+2)^2}$
   $f'(x) > 0$ sur $[0\ ,\ +\infty[$,
   donc la fonction f est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$. 0,5 pt

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $\mathscr{P}(n)$ la proposition $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.
   • **Initialisation**
   $u_0 = 1$ et $u_1 = \dfrac{5 \times u_0 + 4}{u_0 + 1} = \dfrac{5 \times 1 + 4}{1+2} = \dfrac{9}{3} = 3$
   $0 \leqslant 1 \leqslant 3 \leqslant 4$, soit $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 4$, donc la proposition $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   • **Hérédité**
   On suppose la proposition vraie pour un entier $n \geqslant 0$ donné.
   Donc on suppose que $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.
   f est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ donc sur $[0\ ;\ 4[$
   donc de la relation $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$, on déduit :
   $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(4)$. 1 pt
   $f(0) = \dfrac{4}{2} = 2$; $f(u_n) = u_{n+1}$; $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(4) = \dfrac{24}{6} = 4$
   On a donc : $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4$
   D'où : $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4$
   donc la proposition est alors vraie au rang $n+1$.
   On a ainsi prouvé le caractère héréditaire de la proposition.
   • **Conclusion**
   La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$, donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

   On a donc démontré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

   (b) • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a ; $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante.
   • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a ; $u_n \leqslant 4$ donc la suite (u_n) est majorée.
   La suite (u_n) est croissante et majorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente vers un réel ℓ, et comme $u_n \in [0;4]$ pour tout entier n, on peut en déduire que $\ell \in [0;4]$. 0,5 pt

   (c) • la suite (u_n) converge vers $\ell \in [0;4]$.
   • $u_{n+1} = f(u_n)$ et f est continue sur $[0;4]$ en tant que fonction rationnelle définie sur cet intervalle
   Donc d'après le théorème du point fixe, on en déduit que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.
   $$\forall x \in]0;+\infty[\ ,\ f(x) = x \iff \frac{5x+4}{x+2} = x$$
   $$\iff 5x + 4 = x(x+2)$$

$$\iff x^2 - 3x - 4 = 0$$
$$\iff x = 4 \text{ ou } x = -1$$

Or $\ell \in [0;4]$ d'où $\ell = 4$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = 4$. $\boxed{0{,}75 \text{ pt}}$

Cela signifie que le nombre de collaborateurs satisfaits va tendre vers 4 milliers sur les 5 000 que compte l'entreprise.