BACCALAUREAT GENERAL

Session 2024

MATHEMATIQUES

Enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 16

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées en mode examen.

Pensez à rendre le sujet avec votre copie

Le candidat doit traiter les quatre exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5.

Exercice 1 **(5 points)**

Les probabilités demandées dans cet exercice seront arrondies à 10^{-3}.

Un laboratoire pharmaceutique vient d'élaborer un nouveau test anti-dopage.

Partie A

Une étude sur ce nouveau test donne les résultats suivants :

- si un athlète est dopé, la probabilité que le résultat du test soit positif est $0,98$ (sensibilité du test) ;
- si un athlète n'est pas dopé, la probabilité que le résultat du test soit négatif est $0,995$ (spécificité du test).

On fait subir le test à un athlète sélectionné au hasard au sein des participants à une compétition.
On note D l'évènement "l'athlète est dopé" et T l'évènement "le test est positif".
On admet que la probabilité de l'évènement D est égale à 0,08.

1. Traduire la situation sous la forme d'un arbre pondéré.

2. Démontrer que $P(T) = 0,083$.

3. **a.** Sachant qu'un athlète présente un test positif, quelle est la probabilité qu'il soit dopé ?

b. Le laboratoire décide de commercialiser le test si la probabilité de l'évènement "un athlète présentant un test positif est dopé" est supérieure ou égale à $0,95$.
Le test proposé par le laboratoire sera-t-il commercialisé ? Justifier.

Partie B

Dans une compétition sportive, on admet que la probabilité qu'un athlète contrôlé présente un test positif est $0,103$.

1. Dans cette question **1.** on suppose que les organisateurs décident de contrôler 5 athlètes au hasard parmi les athlètes de cette compétition.
On note X la variable aléatoire égale au nombre d'athlètes présentant un test positif parmi les 5 athlètes contrôlés.

a. Donner la loi suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres.

b. Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

c. Quelle est la probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif ?

2. On contrôle désormais n athlètes, où n désigne un entier naturel strictement positif.

a. Déterminer l'expression, en fonction de n, de la probabilité p_n de l'évènement "au moins un athlète contrôlé présente un test positif".

b. Démontrer que, pour tout entier n : $\quad p_n \geqslant 0,75 \iff 0,897^n \leqslant 0,25$

c. i. Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle affiche en sortie le nombre d'athlètes minimum à contrôler pour que p_n soit supérieure ou égale à $0,75$.

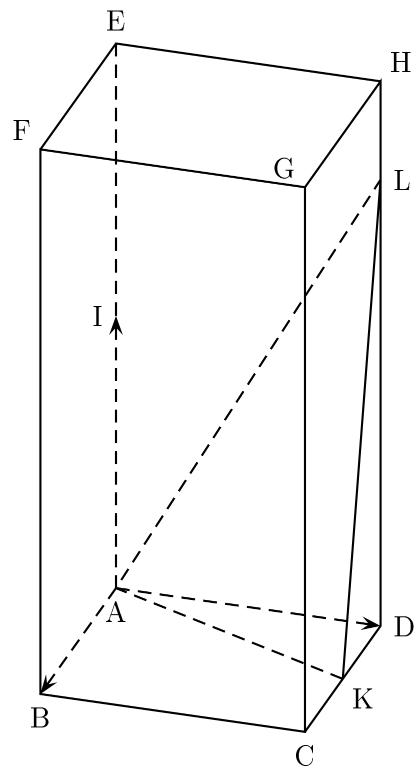
```
def seuil() :
    n = 1
    while ............ :
        n = ............
    return .............
```

ii. Quelle valeur est affichée en sortie à l'exécution de cette fonction **seuil** ?

Exercice 2 **(5 points)**

On considère un pavé droit ABCDEFGH tel que AB = AD = 1 et AE = 2, représenté ci- dessous.

Le point I est le milieu du segment [AE]. Le point K est le milieu du segment [DC]. Le point L est défini par : $\overrightarrow{\text{DL}} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{\text{AI}}$. N est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).



On se place dans le repère orthonormé $\left(\text{A} ;\ \overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AD}},\ \overrightarrow{\text{AI}}\right)$.

On admet que le point L a pour coordonnées $\left(0 ;\ 1 ;\ \dfrac{3}{2}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\text{AK}}$ et $\overrightarrow{\text{AL}}$.

2. a. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(6 ;\ -3 ;\ 2)$ est un vecteur normal au plan (AKL).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (AKL).

c. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par D et perpendiculaire au plan (AKL).

d. En déduire que le point N de coordonnées $\left(\dfrac{18}{49} ;\ \dfrac{40}{49} ;\ \dfrac{6}{49}\right)$ est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).

On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur.}$$

3. a. Calculer le volume du tétraèdre ADKL en utilisant le triangle ADK comme base.

b. Calculer la distance du point D au plan (AKL).

c. Déduire des questions précédentes l'aire du triangle AKL.

Exercice 3 (5 points)

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\quad g(x) = (x+2)\mathrm{e}^{x-4} - 2$.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Déterminer la limite de g en $-\infty$. En donner une interprétation graphique.
   On pourra, après l'avoir justifié, utiliser le fait que $\quad g(x) = \dfrac{x\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{4}} + \dfrac{2\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{4}} - 2$.
3. On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note g' sa dérivée.
   Calculer $g'(x)$ pour tout réel x puis dresser le tableau de variations de g.
4. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
5. En déduire le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
6. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 10^{-3} de α.

Partie B : Étude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\quad f(x) = x^2 - x^2\mathrm{e}^{x-4}$.

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
   - **a.** Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = -xg(x)$ où g est la fonction définie à la partie A.
   - **b.** Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que le maximum de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$ est égal à $\dfrac{\alpha^3}{\alpha+2}$.

EXERCICE 4 **(5 points)**

En mai 2020, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable.

Elle propose alors à ses 5 000 collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.

En mai 2020, seuls 200 d'entre eux ont choisi le télétravail.

Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de l'entreprise constatent que 85 % de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent choisissent de continuer, et que, chaque mois, 450 collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail.

On modélise le nombre de collaborateurs de cette entreprise en télétravail par la suite (a_n).

Le terme a_n désigne ainsi une estimation du nombre de collaborateurs en télétravail le n-ième mois après le mois de mai 2020. Ainsi $a_0 = 200$.

Partie A :

1. Calculer a_1.

2. Justifier que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,85a_n + 450$.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = a_n - 3\,000$.

  a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,85$.

  b. Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

  c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $a_n = -2\,800 \times 0,85^n + 3\,000$.

4. **a.** Démontrer que la suite (a_n) est croissante.

  b. A l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2 500, après la mise en place de cette mesure dans l'entreprise.

Partie B :

Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur son personnel, les dirigeants de l'entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$$

où u_n désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de n mois après le mois de mai 2020.

1. Démontrer que la fonction f définie pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5x+4}{x+2}$ est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4.$$

  b. Justifier que la suite (u_n) est convergente.

  c. Déterminer soigneusement la limite de la suite (u_n).

Fin !